SERENI
PHILOSOPHI ANTINSENSIS
LIBRI DUO,

SERENISSIMO PRINCIPI

JOANNI GASTONI
AB ETRURIA

DICATI;

QUORUM UNUS

DE SECTIONE CYLINDRI,

ALTER

DE SECTIONE CONI:

Utrunque primus Federicus Commandinus Urbinas Latinum fecit, & commentariis illustravit;

Omnia verò secundò, & emendatiùs quàm antea in lucem prodeunt.

PISTORII MDCXCVI.

Ex nova Typographia Stephani Gatti. *Superiorum permissu.*

SERENISS.^{MO} PRINCIPI
JOANNI GASTONI

NICOLAUS BUTI.

ETSI, Principeps Serenissime, ut primùm opera & ingenio Federici Commandini in lucem prodiit Serenus Antinsensis, nunquam antea Latinitate donatus (Græcis enim tantùm scriptus literis, & quidem apud paucos legebatur) dignus illi oppidò visus est, qui alicujus principis viri solus ipse sibi curam omnem ac patrocinium vindicaret: mihi tamen contra reputanti satiùs fore venit in mentem; si quum Apollonii Pergæi priores Conicorum libros quatuor, qui extant adhuc, tui nominis Celsitudini dicavissem; hosce etiam Sereni libros duos, mole quidem exiguos, sed argumenti magnitudine præstātissimos uni eidemque tibi, patrono æquè omnium optimo futuro nuncuparem. Quod planè quum facio; non id à me agi ea ratione existimari velim; quòd de acutissimi tum Geometræ, tum Philosophi excellentia minùs honorificè sentiam: sed ut

geni-

genio cuidam meo indulgeam; ut rei præſenti ſerviam ; ut ſpectatiſſimæ tuæ mentis dignitatem atque præſtantiam non minuam , quæ in omni diſciplinarum genere apprime verſata eſt, & cui longè his etiam majora jure ac meritò debeantur. Et quidem ad me geniumque meum quòd attinet; ita in obſequium tui rapitur animus, & ſplendore majeſtatis, & honore virtutum, & gloria diſciplinarum omnium ; ad quæ te vel Natura procreavit , vel efformavit induſtria : ut ſi quid in me ſit ingenii, quod admodum exiguum eſſe intelligo ; ſi quid à me ſuſcipiatur laboris, à quo certè nunquam virium imbecillitas abhorrebit; nullo non tempore ad te, ſi non exornandum , colendum ſaltem, duxerim eſſe conferendum. Etenim & ſuperioribus annis, quum te Univerſalium Studiorum Patronum lectiſſimæ indolis adoleſcentes & Patres ſapientiſſimi ſummè ornarent , excepiſti gratus ac libens tenuitatem dicendi meam , rei magnitudini ſuccumbentem . At enim quoniam, ut de Platone dicebat Cicero, nec te nimis valde unquam, nec nimis ſæpe laudaverim : accipe & in præſentia unà cum Apollonii Pergæi Conicis Elementis Serenum quoque Philoſophum Antinſenſem , de ſectione Cylindri, & Coni per verticem differentem, teſtimonium cordis potiùs futurum quàm oris , quo te ſummopere demiror ac veneror . Et planè uni etiam tibi is erat nuncupandus auctor; ne , quos præclariſſimos viros argumenti ſimilitudo conjunxerat, diſjungere patrocinii diverſitas videretur. quippe tu & Guidi Ubaldi , & Franciſci Mariæ ejus filii Urbinatum Principum dignitatem ac gloriam complexus es; quibus alter Apollonium, Serenum alter tuebatur & illuſtrabat . Ego equidem nec fui minùs quàm antea ; quum hæc emendarem, accuratus ; nec minùs , quum te Patronum Ampliſſimum deligerem, obſequens: obſervantiam verò erga te meam perpetuò ſpondeo non defuturam.

Piſtorii. IX Kal. Aug. CIϽIϽCXCVI.

SERENI ANTINSENSIS

PHILOSOPHI LIBER PRIMUS DE SECTIONE CYLINDRI CUM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI URBINATIS.

SERENUS CYRO S. D.

CUM viderem quamplurimos, amice Cyre, eorum qui in Geometria versantur, arbitrari transversam cylindri sectionem longè diversam esse ab ea sectione coni, quæ ellipsis appellatur; non committendum putavi, ut ab errore non averterem tum eos ipsos, qui ita arbitrantur, tum eos, qui ab his illud ita esse persuaderi possent: quanquam absurdum omnino videatur, Geometras ipsos de problemate Geometrico sine demonstratione quicquam affirmare. oratio enim probabilis, & sine ullo artificio à Geometria alienissima est. Itaque quoniam hi ita sentiunt; nos autem non assentimur: libuit Geometricè demonstrare, unam atque eandem specie sectionem necessariò fieri in utrisque figuris, in cono, inquam, & cylindro; si modò ratione quadam, & non simpliciter secentur. Quemadmodum autem veteres, qui conica tractarunt, non contenti communi intelligentia coni, nempe quòd à triangulo rectangulo constitueretur: universaliùs & artificiosiùs de ipso conscripserunt, non tantùm rectos, sed etiam scalenos conos statuentes: ita & nobis faciendum erit. nam cùm cylindri sectionem nobis tractandam proposuerimus, non solùm rectum cylindrum, sed etiam

ſcalenum ponentes, quæ ad hanc contemplationem pertinent, latiùs, fuſiùſque explicabimus. Et quanquam certò ſciam neminem fore, qui facilè admittat non omnem conum rectum eſſe, communi notione id ſuadente: tamen contemplationis gratià meliùs eſſe iudicavi univerſaliori diffinitione ipſum comprehendere. etenim cylindri recti ſectio eadem eſt, quæ ellipſis recti coni. Sed cylindro univerſaliùs accepto, ſectionem eius omni pariter ellipſi eandem eſſe neceſſariò continget: id quod nos in hoc libro probare inſtituimus. Attendenda autem priùs hæc ſunt, quæ ad propoſitam materiam diffinire oportet.

DIFFINITIONES.

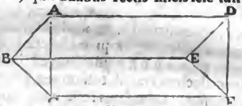
1 SI igitur duorum circulorum æqualium & æquidiſtantium diametri, ſemper inter ſe ſe æquidiſtãtes & ipſæ in circulorum planis circa manens centrum circunferantur; & unà circunferatur recta linea, diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moveri cœpit: ſuperficies, quæ à circumlata linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta. 2 Cylindrus, figura, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur. 3 Cylindri baſis, circuli ipſi. 4 Axis, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur. 5 Latus autem cylindri, linea, quæ, cùm recta ſit & in ſuperficie ipſius cylindri, baſes utraſque contingit; quam & circumlatam cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus. 6 Cylindrorum, recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus. 7 Scaleni autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent. Sed & hæc ex Apollonio ſcire oportet. 8 Omnis lineæ curvæ, in uno plano exiſtentis, diameter vocetur recta linea; quæ quidem ducta à linea curva, omnes, quæ in ipſa ducuntur rectæ cuipiam æquidiſtantes, bifariam dividit. 9 Vertex lineæ, terminus ipſius rectæ, qui eſt ad lineam. 10 Ordinatim ad diametrum applicari dicatur unaquæque linearum æquidiſtantium 11 Coniugatæ diametri dicantur; quæ quidem à linea ordinatim ductæ ad coniugatas diametros, ipſas ſimiliter dividunt. 12 His igitur poſitis, & in tranſverſis ſectionibus cylin-

dri

dri punctum, quod diametrum bifariam dividit, centrum sectionis vocetur. 13 Quæ à centro ad lineam perducitur, ea, quæ ex centro. 14 Quæ verò per centrum sectionis transit, æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, & terminatur ab ipsa linea, secunda diameter dicatur. demonstrabitur enim lineas omnes in sectionem ductas, quæ quidem diametro æquidistant, bifariam secare. 15 Illud etiam determinandum est, similes ellipses esse, quarum coniugatæ diametri, sese ad angulos æquales secantes, eandem habent proportionem.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

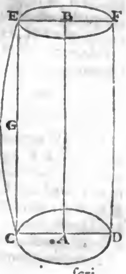
SI duæ rectæ lineæ sese tangentes, duabus rectis lineis sese tangentibus æquidistent; & sint utræque utrisque æquales: quæ terminos earum coniungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales & æquidistantes erunt.



SINT duæ rectæ lineæ se se tangentes A B, B C; quæ duabus rectis lineis sese tangentibus D E, E F æquidistent: sitque A B æqualis D E, & B C ipsi E F: & iungantur A C, D F. Dico lineas A C, D F & æquales esse & æquidistantes. Iunctis enim A D, B E, C F, quoniam A B ipsi D E est æqualis & æquidistans: erit A D & æqualis & æquidistans ipsi B E. rursus quoniam B C ipsi E F est æqualis & æquidistans: & C F æqualis & æquidistans erit ipsi B E. quare A D, C F æquales inter se se & æquidistantes erunt: ac propterea ipsæ quoque A C, D F. quod propositum fuerat ostendendum. 33.primi. 30.primi.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

SI cylindrus plano secetur per axẽ; sectio parallelogrammũ erit.



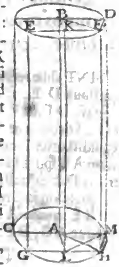
SIT cylindrus, cuius bases circuli circa centra A, B; axis autem A B recta linea: & ducatur per A B planum secans cylindrum, faciensque sectiones, in circulis quidem rectas lineas C D, E F, quæ diametri sunt; in superficie autem cylindri ipsas E G C, D F. Dico utranque linearum E G C, D F rectam esse. Si enim fieri potest; non sint rectæ: & ducatur recta E H C. Quoniam igitur linea E G C & E H C recta in plano E D conveniunt ad E, C pũcta; atque est E G C in superficie cylindri: ipsa E H C in cylindri superficie non erit. & quoniam circuli A, B æquales sunt & æquidistantes; secanturque à plano E D: communes ipsorum sectiones æquidistantes erunt, atque etiam æquales, cũm diametri sint æqualium circulorum. itaque si manentibus A, B punctis, diametros A C, B E intelligamus circunferri; & unà cum ipsis rectam lineam E H C circa circulos A, B, quousque rursus in eundem locum restituantur, à quo moveri cœperunt: recta E H C cylindri superficiem de- 16.undecimi.

ſcribet: & erit H punctum in ſuperficie ipſa. atqui erat extra ſuperficiem; quod fieri nullo modo poteſt. recta igitur linea eſt E G C. ſimiliter & recta eſt ipſa F D: & con-
33.primi. iungunt æquales, & æquidiſtantes lineas E F, C D. parallelogrammum igitur erit ipſū E D. quod oſtendiſſe oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

SI cylindrus plano ſecetur æquidiſtante ei parallelogrammo, quod fit per axem: ſectio parallelogrammum erit, æquales ipſi angulos habens.

SIT cylindrus, cuius baſes circuli circa centra A, B; & axis A B recta linea; parallelogrammum autem per axem C D: & ſecetur cylindrus altero plano E F G H, æquidiſtante ipſi C D parallelogrammo; quod faciat ſectiones, in baſibus quidem rectas lineas E F, G H; in ſuperficie autem cylindri ipſas E G, F H. Dico figuram E G H F parallelogrammum eſſe, æquiangulum ipſi C D. Ducatur à centro B ad E F perpendicularis B K; perq; ue lineas K B, B A ducto plano, communes ſectiones ſint A L, K L: & iungãtur B F, A H. Quoniam igitur circulus A circulo B æquidiſtat, & C H planum plano C D; ſecanturque ab ipſo A B K L plano:
16.unde. linea A L æquidiſtabit lineæ B K. & K L ipſi B A. quare K A paral-
34.primi lelogrammum eſt: ideoque linea K L æqualis eſt lineæ B A, & B K ipſi A L. & quoniam B K quidem ipſi A L æquidiſtat, K F verò ipſi
10.unde. L H: & B K F angulus æqualis erit angulo A L H. atque eſt B K ad K F perpendicularis. perpendicularis eſt igitur A L ad ipſam L H. ſunt
A B autẽ æquales. ergo æquales & ipſæ E F, G H, & æquidiſtantes. præterea quoniam B F æquidiſtans eſt ipſi A H: planum, per B F atque axem ductum, tranſibit etiam per A H: ſectionemque faciet parallelogrammum; cuius latus recta linea, quæ F, H puncta coniungens, in ſuperficie ipſius cylindri exiſtet. eſt autem & F H latus figuræ E F G H in ſuperficie cylindri. commune igitur latus eſt & parallelogrammi per axem. quare recta linea eſt F H. ſimiliter & recta demonſtrabitur ipſa E G. ſed coniungunt æquales, & æquidiſtantes lineas E F, G H. ergo ipſum E H parallelogrãmum erit. Dico inſuper & æquiangulum eſſe C D parallelogrammo. Quoniam enim duæ lineæ D B, B F duabus lineis M A, A H æquidiſtant; ſuntque quatuor lineæ æquales: & ipſæ F D, M H inter ſe æquales erunt & æquidiſtantes, ex primo theoremate. ergo & æquales & æquidi-
C ſtantes ipſæ F H, D M. eſt autem & L H ipſi A M æquidiſtans. angulus igitur L H F parallelogrammi E H æqualis eſt angulo A M D parallelogrammi C D. quare parallelogrammum E H parallelogrammo C D æquiangulum erit.



COMMENTARIVS.

A ERGO æquales & ipſæ E F, G H, &c.] *Nam cùm ſit B K ad E F perpendicularis; erit E K æqualis K F, & ita G L ipſi L H. ſed æquales ſunt B F, A H, ſemidiametri ſcilicet æqualium circulorum. quare ex penultima primi quadratum K F æquale erit quadrato L H: & iccirco lineæ K F, L H inter ſe æquales. ergo & æquales ipſæ E K, G L: & addita utrinque æquali, erit tota E F toti G H æqualis. Hoc etiam conſtare poteſt ex decima quarta tertij. ſunt enim A, B circuli inter ſe æquales: & lineæ G H, E F à centro æqualiter diſtant.*

B Præterea quoniam B F æquidiſtans eſt ipſi A H.) *Sunt enim duæ lineæ B K, K F ſeſe*

iun-

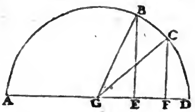
tangentes duabus lineis sese tangentibus AL, LH æquales & æquidistantes, quare quæ ipsas coniungunt rectæ lineæ BF, AH æquales erunt & æquidistantes, ex prima huius.

Angulus igitur LHF &c.) *Ex decima undecimi, & eadem ratione reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt.* C

THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

SI curvæ lineæ recta ſubtendatur; & quæ à linea ad ſubtenſam perpendiculares ducũtur, poſſint æquale ei, quod ipſius ſubtenſæ partibus continetur: dicta linea circuli circunferentia erit.

SIT curva linea ABD; & quæ ei subtenditur recta AD: ducantur autem BE, CF perpendiculares ad ipsam AD; ponaturque quadratum BE æquale rectangulo AED, & quadratũ CF æquale ipsi AFD. Dico lineam ABD circuli circunferentiam esse. Secetur enim AD bifariam in puncto G: & iungatur GB, GC. Quoniam igitur quadratum GD æquale est quadrato BE, & quadrato GE. quadratum autem BG æquale quadratis GE, EB. erit linea BG ipsi GD æqualis. & similiter demonstrabitur CG æqualis GD, & aliæ eodem modo. semicirculus igitur est linea ABD. A



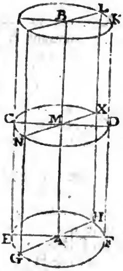
COMMENTARIVS.

Quoniam igitur quadratum GD æquale est quadrato BE.] *Est enim ex quinta secundi quadratum GD æquale rectangulo AED, & quadrato GE. sed cùm ponatur quadratum BE æquale rectangulo AED. erit quadratum GD duobus quadratis BE, EG æquale. & est quadratum GB æquale iisdem ex penultima primi. ergo quadratum GB æquale erit quadrato GD: & iccirco linea GB ipsi GD est æqualis. Hoc autem demostratum est à Pappo, & Eutocio in quintam propositionem primi libri conicorum Apollonij.* A

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI cylindrus plano basibus æquidistante secetur; sectio circulus erit, centrum habens in axe.

SIT cylĩdrus, cuius bases quidẽ circuli A, B; axis autẽ AB recta: & secetur plano basibus æquidistãte; quod faciat sectionẽ in superficie cylindri lineã CXD. Dico ipsam CXD circuli circunferentiã esse. Describantur in circulo A diametri EF, GH: & per utranque ipsarum, & axem ducantur plana cylindrum secantia; quæ faciant sectiones parallelogramma ipsa: & sit parallelogrãmi EK, & plani CXD communis sectio CD; parallelogrammi autem GL, & eiusdem plani communis sectio NX. Quoniam igitur planum CXD æquidistat circulo A; & secantur à plano EK: linea CD lineæ EF est æquidistans: & eadem ratione linea NX æquidistans ipsi GH. itaque quoniam BA utrique CE, DF æquidistat; & est EA æqualis AF: erit CM ipsi MD æqualis. similiter quoque cùm sit GA æqualis AH: & NM æqualis erit MX. sunt autem AE, AG æquales. ergo & MC, MN æquales erunt. quare omnes MC, MD, MN, MX inter se æquales. A



les. & ſimili ratione aliæ æquales oſtendentur, quæcunque puncto M ad lineam
B CXD pertinent. circulus igitur eſt ſectio CXD, qui centrum habet in linea AB. Illud verò manifeſtè apparet. nam cùm punctum M ſit in tribus planis; & in ipſa AB communi planorum ſectione neceſſariò erit, hoc eſt in ipſo axe.

COMMENTARIVS.

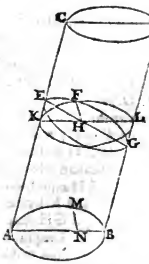
A ERIT CM ipſi MD æqualis.] *Nam cùm & linea CD æquidiſtet lineæ EF, & NX ipſi GH; parallelogramma erunt ipſa EM, MF, GM, MH: & ideo linea CM æqualis ipſi EA, MD ipſi AF, & NM ipſi GA, & MX ipſi AH. quare æqualibus exiſtentibus EA, AF, GA, AH, & ipſæ CM, MD, MN, MX æquales erunt.*

B Circulus igitur eſt ſectio CXD, qui centrum habet in linea AB.] *Sequitur ex demonſtratis ſectionem eiuſmodi non ſolùm circulum eſſe, ſed & æqualem circulis baſium; quod ipſe Serenus tanquam notum omiſit. Cùm enim parallelogrammum ſit ED: linea CD diameter ſectionis æqualis eſt diametro baſis EF. quare & circulus circulo æqualis erit.*

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

SI cylindrus ſcalenus per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi; ſecetur autem & altero plano, recto ad parallelogrammum per axem, quod faciat communem ſectionem in parallelogrammo rectam lineam, æquales angulos continentem iis, qui ſunt parallelogrammi, non autem ipſius baſibus æquidiſtantem: ſectio circulus erit. vocetur autem talis ſectio ſubcontraria.

SIT cylindrus ſcalenus, cuius parallelogrammum per axem AD, ad rectos angulos exiſtens ipſi baſi: ſecetur autem cylindrus & altero plano EFG, ad parallelogrammum AD recto, quod in ipſo cõmunem ſectionem faciat rectam lineam EG, baſibus AB, CD minimè æquidiſtantem; ita ut contineat angulum GEA æqualem angulo EAB, angulum verò EGB æqualem ipſi ABG. Dico ſectionem EFG circulum eſſe. Sumatur aliquod punctum in linea EG, quod ſit H: & ad rectos angulos ipſi EG



4. diff. undecimi. ducatur HF in EFG plano. ergo FH perpendicularis eſt ad planum AD. ducatur per H ipſi AB æquidiſtans KHL: ponaturque ipſi AB ad rectos angulos MN: & per FH, KL ducatur planum, faciens ſectionem KFL. Quoniam igitur MN in baſis plano exiſtens, perpendicularis eſt ad AB communem planorum ſectionem: erit
6. undecimi. ipſa MN perpendicularis ad planum AD. quare FH, MN æquidiſtantes ſunt. ſed & æquidiſtantes ipſæ KL,
15 AB. ergo æquidiſtantia quoque, quæ per illas tranſeunt
per præcedentem plana. ſectio igitur KFL æquidiſtans eſt baſi: ideoque KFL circulus eſt; & eius diameter KL, cui ipſa FH
8. & 17. ſexti. ad rectos angulos inſiſtit. quare rectangulum KHL eſt æquale quadrato FH. at rectangulo KHL æquale eſt ipſum EHG rectangulum: cùm ſit EH æqualis ipſi HK,
6. primi. A & GH ipſi HL; propterea quòd ad baſes EK, LG anguli æquales ſunt. ergo quadratum FH æquale eſt rectangulo EHG. atque eſt FH ad EG perpedicularis.

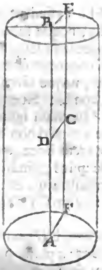
ſimi-

similiter autem & si ad E G alia ducatur æquidistans ipsi F H; poterit æquale ei, quod partibus E G continetur. circulus igitur est E F G sectio, cuius diameter E H G recta linea. B

COMMENTARIVS.

PROPTEREA quòd ad bases E K, L G anguli æquales sunt.] *Positum enim est angulum G E A æqualem esse angulo E A B, & E G B ipsi A B G. Quòd cùm anguli E A B, E K L æquales sint; erunt & ipsi H E K, H K E æquales: & ita æquales eorum coalterni H G L, H L G.* A 29. primi.

Circulus igitur est E F G sectio.) *Ex quarta huius.* B



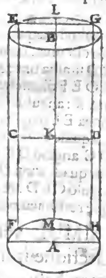
THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

CYLINDRO dato, & puncto in superficie eius; per dictum punctum latus cylindri ducere.

SIT cylindrus, cuius bases circuli A, B; axis A B recta linea, & datum punctum in eius superficie C: oporteat autem per C ducere cylindri latus. Agatur à puncto C perpendicularis ad lineam A B, quæ sit C D: & per A B, C D lineas ducatur planum cylindrum secans. sectio igitur per C transibit: & faciet in superficie rectam lineam E C F; quæ quidem cylindri latus erit.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

SI in superficie cylindri duo puncta sumantur, non existentia in latere parallelogrammi per axem: quæ dicta puncta coniungit recta linea, intra cylindri superficiem cadet.



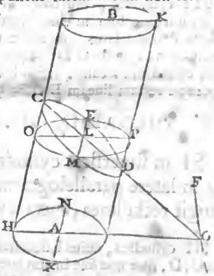
SIT cylindrus, cuius bases circuli A, B: sumanturque in superficie eius duo puncta C, D, quæ non sint in uno latere parallelogrammi per axem; & iungatur C D. Dico ipsam C D intra cylindri superficiem cadere. Si enim fieri potest; vel in superficiem eius, vel extra superficiem cadat. & quoniam puncta C, D non sunt in latere cylindri: ducatur per C quidem latus E C F, per D verò ipsum G D H; & iungantur E G, F H. ergo E G, F H intra circulos cadent. 2. tertii. sumatur aliquod punctum in linea C D, quod sit K: vel igitur K erit in superficie cylindri, vel extra. Sit primùm in superficie: & per K ducatur latus cylindri, L K M recta linea: quæ quidem cadens in circunferentias E G, F H; si producatur, neutram rectarum E G, F H secabit. quare L M non erit in plano F E G H. sed punctum K est in ipsa L M. non igitur K erit in plano F E G H. Quoniam autem C D est in ipso F E G H plano; & in C D est punctum K: erit K in eodem F E G H plano. quare K in dicto plano erit, & non erit; quod fieri non potest. non igitur C D est in superficie cylindri. Sed sit extra; sumaturque in circunferentia E G aliquod punctum L: & iungatur K L. ergo K L ex utraque parte producta neutram rectarum E G, F H secabit. quare non erit in plano F E G H. reliqua verò, sicuti superiùs, manifestè concludentur.

THEO-

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

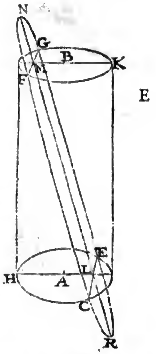
SI cylindrus plano secetur, neque basibus æquidistante, neque subcontrariè posito, neque per axem, neque æquidistante ei, quod per axem fit, parallelogrammo; sectio neque circulus, neque parallelogrammum erit.

SIT cylindrus, cuius bases circuli A, B; & secetur plano neque æquidistante basibus, neque subcontrariè posito, neque per axem, neque axi æquidistante: vel igitur secans planum bases utrasque secabit, vel alteram tantùm, vel neutram. Primùm verò neutram secet: & faciat in superficie cylindri lineam C E D. Dico C E D sectionem, neque circulum esse, neque rectilineum. Nam rectilineum non esse manifestò constat. Sit enim rectilineum; si fieri potest: & sumatur latus quodpiam ipsius C
A E. Quoniam igitur in cylindri superficie duo puncta C, E sumuntur, in eodem latere cylindri non existentia; latus enim in duobus punctis talem lineam non secat: erit recta linea, quæ puncta C, E coniungit in superficie ipsius cylindri; quod quidem fieri non posse iam demonstratum est. non igitur recta linea est C E, neque ipsum C E D rectilineum. Demonstrandum deinceps est, neque circulum esse; Quoniam enim sectionis C E D planum plano circuli A non est æquidistans: si plana producantur, ipsa se invicem secabunt. secent ergo se se; & sit ipsorum communis sectio F G: perque A centrum ducatur H A G ad F G perpendicularis: & per H A & axem ducatur planum; faciens in cylindro sectionem parallelogrammum H K; in sectione autem C E D rectam lineam C D: & secta C D bifariam in puncto L, ducantur ipsi F G æquidistantes; per L quidem linea E L M, per
9. undecimi. A verò ipsa N A X. quare M E, N X inter se se æquidistantes erunt. ducatur deinde planum per E M,
5. huius. basi cylindri æquidistans, quod faciat in cylindro sectionem O E P M: erit O E P M sectio circulus; cuius diameter O P bifariam secatur in L. nam cùm triangula L O C, L P D similia sint; & sit C L æqualis L D: erit & O L ipsi L P æqualis. quare E L M circuli O E P diameter erit. & quoniam linea O L lineæ H A æquidistat, & linea L M
10. undecimi. B ipsi A X: angulus O L M angulo H A X est æqualis. rectus igitur est angulus O L M, & linea E L perpendicularis ad O P circuli diametrum. ex quo sequitur quadratum
C E L æquale esse rectangulo O L P. quoniam autem sectio non est subcontraria; angulus L O C angulo O C L æqualis non erit: & iccirco latus O L lateri C L inæquale. non igitur quadratum O L, hoc est rectangulum O L P æquale est quadrato C L, hoc est rectangulo C L D: & propterea sectio C E D non est circulus. demonstratum autem est neque rectilineum esse. quæ quidem omnia demonstrasse oportebat.



D SIMUL verò & illud demonstratum est rectam lineam, quæ in sectione ipsi F G æquidistans ducta bifariam dividit C D, diametro basis æqualem esse.

SED secet planum etiam ipsas bases; basim quidem A recta linea C E, ipsam verò



verò B recta FG : perque A ducatur HAL perpendicularis ad CE; & per HA diametrum & axem ducatur planum, quod faciat sectionem HK parallelogrammum : plani autem FE, & HK parallelogrammi communis sectio sit LM. Quoniam igitur planum FE neque per axem ductum est, neque axi æquidistans : linea LM in infinitum protracta secabit ipsum axem. quare & lineam HN axi æquidistantem: utræque enim sunt in HK plano. secet in puncto N, & producatur HN utranque in partem. itaque si axe, & circulis manentibus, ipsa HN circunferatur unà cum diametris, quousque redeat in eum locum, à quo moveri cœpit: cylindri superficies secundùm altitudinem augebitur: & producto plano FE, augebitur etiam sectio usque in punctum N. illud idem continget & ex parte CL. erit ergo NGER cylindri sectio, qualis in præcedenti theoremate. ex quibus sequitur neque circulum esse, neque rectilineum. quare sectio CEGF neque rectilineum est, neque circulus, neque portio circuli: sed erit sectio eiusmodi cylindri sectionis portio.

COMMENTARIUS.

QVONIAM igitur in superficie cylindri duo puncta C, E sumuntur.) *Cùm enim positum sit cylindrum secari plano neque per axem ducto, neque axi æquidistante; non erunt dicta duo puncta in uno latere cylindri. quare sequtur, ut quæ ea coniungit recta linea, intra cylindri superficiem cadat, & non in ipsa superficie. quod in præmissa demonstratum iam fuit.* A

Rectus igitur est angulus OLM.] *Est enim angulus HAX rectus; quod linea NX æquidistat lineæ FG. quare & ipse OLM rectus erit.* B

Angulus LOC angulo OCL æqualis non erit. *Ex ijs, quæ in sexta huius demonstrata sunt.* C [margin: 10. primi.]

Simul verò & illud demonstratum est, rectam lineam.) *Demonstratum nanque est lineam ELM circuli OEP diametrum esse. ergo æqualis erit diametro basis; cùm circuli OEP, HNX sint æquales. quod & nos proximè ostendimus in commentarijs in quintam huius.* D

Linea LM in infinitum protracta secabit ipsum axem. quare & lineam HN axi æquidistantem.) *Demonstravit illud Vitellio in propositione secūdi libri primi Perspectivæ.* E

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

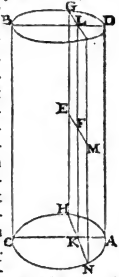
SI cylindrus plano per axem secetur; sumatur autem aliquod punctum in eius superficie, quod non sit in latere parallelogrammi per axem; & ab ipso ducatur recta linea æquidistans rectæ cuipiam, quæ in eodem plano existit, in quo cylindri basis, & ad rectos angulos incidit basi parallelogrammi per axem: cadet ea intra parallelogrammum; & producta usque ad alteram partem superficiei ab ipso parallelogrammo bifariam secabitur.

SIT cylindrus, cuius bases A, B circuli, & parallelogrammum per axem CD: sumatur autem aliquod punctum E in superficie cylindri; & ab ipso ducatur recta

B linea

linea E F æquidiſtans rectæ cuipiam, quæ perpendicularis ſit ad C A baſim parallelogrammi per axem. Dico lineam E F intra C D parallelogrammum cadere; & ſi ulteriùs producatur uſque ad alteram partem ſuperficiei, ab ipſo parallelogrammo bifariam ſecari. Ducatur enim per E linea H E G æquidiſtans axi, quæ baſis circunferentiam ſecet in H: & per H ducatur H K æquidiſtans lineæ perpendiculari ad C A; cui etiam æquidiſtantem poſuimus E F. ergo & H K ipſam C A ſecabit. itaque per rectas lineas G H, H K ducatur planum ſecans cylindrum; quod faciat ſectionem parallelogrammum G N: & iungatur K L, communis ſectio parallelogrammorum C D, N G. Quoniam igitur lineæ E F, H K uni & eidem æquidiſtant; atque eſt H K in plano K G: & ipſa E F in K G plano erit. quare producta incidet in L K, quæ eſt in eodemmet plano. linea igitur E F intra C D parallelogrammum cadet. perſpicuum autem eſt, ſi ad alteram partem producatur uſque in punctum M, quod eſt in ſuperficie cylindri; bifariam ſecari in F. nam cùm diameter C A perpendicularis ſit ad H K; erit H K ipſi K N æqualis. ſed æquidiſtantes ſunt lineæ M N, L K, G H. ergo M F ipſi F E æqualis erit.

(Margin notes: A, B, C; 3. tertii.)



COMMENTARIVS.

A ERGO & H K ipſam C A ſecabit.) *Ex ſecunda primi Vitellionis. Secabit autem & ad angulos rectos, ex vigeſima nona primi Elementorum; quod ipſe poſtea tanquam manifeſtum aſſumit.*

B Quoniam igitur lineæ E F, H K uni & eidem æquidiſtant.] *Lineæ E F, H K uni & eidem æquidiſtantes, & inter ſeſe æquidiſtabunt: & ducta E H linea, erunt utræque in eodem plano, in quo ipſa E H, hoc eſt in plano K G. quare producta E F incidet in L K æquidiſtantem ipſi G H, & in eodem exiſtentem plano, ex ſecunda primi Vitellionis.*

C Ergo M F ipſi F E æqualis erit.) *Æquidiſtant enim & ipſæ E M, H N, ut dictum eſt. quare parallelogramma ſunt H F, F N. quòd cùm æquales ſint H K, K N; & ipſæ E F, F M æquales erunt.*

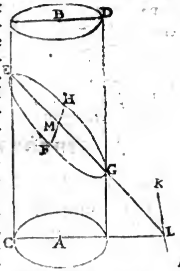
THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

SI cylindrus ſecetur plano, baſis planum extra circulum ſecante; communis autem planorum ſectio perpendicularis ſit ad baſim parallelogrammi per axem, vel ad eam, quæ in rectum ipſi conſtituitur: rectæ lineæ, quæ à ſectione in ſuperficie cylindri à ſecante plano facta ducuntur, æquidiſtantes lineæ perpendiculari ad baſim parallelogrammi per axem, vel ad eam, quæ in rectum ipſi conſtituitur, in communem ſectionem planorum cadent; & productæ uſque ad alteram ſectionis partem, à communi planorum ſectione bifariam dividentur: quæ verò perpendicularis eſt ad baſim parallelogrammi per axem, vel ad eam, quæ in rectum ipſi conſtituitur; cylindro recto exiſtente, etiam ad communem planorum ſectionem, parallelogrammi ſcilicet per axem

& ſe-

& secantis plani perpendicularis erit; scaleno autem existente cylindro non item, præterquam cùm parallelogrammum per axem ad ipsam basim cylindri rectum fuerit.

SIT cylindrus, cuius bases quidem circuli A, B; parallelogrammum autem per axem C D: & secetur plano, ut dictum est, quod faciat sectionem E F G H; ita ut plani sectionis E F G H, & basis A C communis sectio sit recta linea K L, ad ipsam C A L perpendicularis: & à sectione E F G H ducatur linea F M æquidistans ipsi K L, quæ producta pertineat ad alteram partem superficiei in puncto H. Dico lineam F M cadere in E G, & ipsi M H æqualem esse. Nam quoniam in sectione E F G H ducta est F M æquidistans K L: intra C D parallelogrammum cadet. quoniam autem F M est in plano E F G H; atque est E G communis sectio ipsius, & parallelogrammi C D: cadet F M in E G; & F M ipsi M H æqualis erit; quod patet ex antecedenti theoremate. Reliquum est, ut ostendamus, si cylindrus rectus sit, vel planum C D rectum ad basim cylindri; lineam K L ad ipsam E G L perpendicularem esse. Quoniam enim C D planum ad planum basis rectum est; & K L in basis plano existens perpendicularis est ad C A L communem planorum sectionem: & ad reliquum ipsius C D parallelogrammi planum perpendicularis erit. A



Quòd si planum C D non sit rectum ad basim; K L ad L E perpendicularis non erit. Si enim fieri potest; sit K L perpendicularis ad L E. est autem & ad L C perpendicularis. quare & ad planum, quod per ipsas transit, hoc est ad C D. planum igitur per K L, hoc est planum basis ad C D planum rectum erit: quod non ponitur. ergo K L ad L E non est perpendicularis. 4. unde. 18

EX iam demonstratis constat lineam E G sectionis E F G H diametrum esse. omnes enim, quæ ad ipsam ducuntur, æquidistantes lineæ K L, ut F H, bifariam dividit.

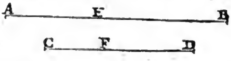
COMMENTARIVS.

ET ad reliquum ipsius C D parallelogrammi planum perpendicularis erit.) A
Nam cùm planum C D rectum sit ad basis planum; linea K L, quæ est in eadem basi, perpendicularis ad C L communem planorum sectionem, & ad ipsum C D planum perpendicularis erit. quare & ad E G L, & ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt. 4. diff. undecimi. 3. diff.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

SI duæ rectæ lineæ similiter secentur; erit ut quadratum primæ ad quadratum secundæ; ita quod fit ex primæ partibus rectangulum ad rectangulum ex partibus secundæ.

RECTÆ nanque lineæ A B, C D similiter secentur in punctis E, F. Dico ut quadratum A B ad quadratum C D, ita esse rectangulum A E B ad rectangulum C F D. Quoniam enim ut A E ad E B, sic C F ad F D: erit componendo, permutandoque ut A B ad C D, sic E B ad F D. & rursus quoniam ut A E ad E B, ita C F ad F D: rectangulum A E B ad



rectan-

ctangulum C F D duplam proportionem habebit eius, quæ est E B ad F D, hoc est quæ A B ad C D. sed & quadratum A B ad quadratum C D duplam eius, quæ est A B ad C D, proportionem habet. ergo ut quadratum A B ad C D quadratum, ita rectangulum A E B ad rectangulum C F D. quod demonstrandum proponebatur.

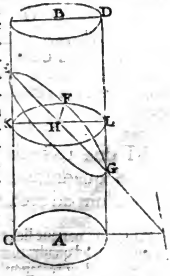
COMMENTARIVS.

A RECTANGVLVM A E B ad rectangulum C F D duplam proportionem habet eius, quæ est E B ad F D.) *Rectangula enim A E B, C F D similia sunt; quòd latera habeant proportionalia. quare ex corollario vigesimæ sexti in dupla sunt proportione laterum similis rationis. habebit igitur rectangulum A E B ad ipsum C F D duplam proportionem eius, quæ est E B ad F D, hoc est quæ A B ad C D. & eadem ratione quadratum A B ad C D quadratum duplam habet eius, quæ est A B ad C D. quare ex undecima quinti sequitur rectangulũ A E B ad ipsum C F D esse, ut quadratum A B ad quadratum C D.*

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

SI cylindrus plano secetur per axem; & secetur altero plano basis planum secante, ita ut communis sectio basis & secantis plani perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam, quæ in rectum ipsi constituitur; à sectione autem ad diametrum ducatur linea communi planorum sectioni æquidistans: poterit dicta linea spatium quoddam; ad quod rectangulum, diametri sectionis partibus contentum, eam proportionem habet, quàm diametri sectionis quadratum ad quadratum diametri basis.

SIT cylindrus, cuius bases A, B circuli, & parallelogrammum per axem C D; secetur autem cylindrus plano occurrenti plano basis secundùm rectam lineam, quæ ad ipsam C A productam sit perpendicularis; sitque sectio facta E F G; & communis sectio parallelogrammi C D, & secantis plani linea E G,



in præcedenti. diameter existens sectionis, ut ostensum est: sumpto deinde in sectione quovis puncto F, ab eo ad diametrum ducatur re-

11. huius. cta linea F H, æquidistans communi planorum sectioni. cadet F H, ex ijs, quæ demonstrata sunt, in ipsam E G. Dico rectangulum E H G ad quadratum F H eam proportionem habere, quàm diametri E G quadratum ad quadratum diametri basis. Ducatur enim per H linea K H L æquidistans ipsi C A: & per F H, K L rectas lineas planum ducatur, quod faciat sectionem K F L. Itaque quoniam linea K L æquidistans est lineæ C A; & F H æquidistans commu-

15. undecimi. ni planorum sectioni, quæ in basis plano existit: & quæ per ipsas transeunt plana inter se æquidistantia erunt. qua-

5. huius. re circulus est sectio K F L. rursus quoniam K L ipsi C A est

A æquidistans; & F H æquidistans communi sectioni planorum, quæ perpendicularis est ad C A: erit & F H ad K L perpendicularis. est autem circulus K F L. ergo quadratum F H rectangulo K H L

B æquale erit. & cùm æquidistet K E ipsi L G; ut K H ad H L, ita est E H ad H G. ergo rectangulum E H G simile est rectangulo K H L: & propterea ut rectãgulum E H G

ad

ad ipsum KHL, hoc est ad quadratum FH, ita quadratum diametri EG ad quadratum KL, hoc est ad quadratum diametri basis.

COMMENTARIVS.

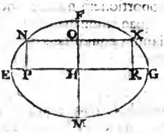
RVRSVS quoniam KL ipsi CA est æquidistans, & FH æquidistans communi planorum sectioni.] *Sequitur ex his, & decima undecimi angulum FHL æqualem esse angulo, qui continetur communi planorum sectione, & linea CA. quare cùm hic rectus sit; & ille necessariò rectus erit; & linea FH, perpendicularis ad KL, proportionalis erit inter KH, HL. quadratum igitur FH æquale est rectangulo KHL.* A 8. sexti. 17.

ET cùm æquidistet KE ipsi LG; erit ut KH ad HL, ita EH ad HG. *Triangulum enim EHK simile est triangulo GHL; quòd anguli H ad verticem æquales sint; qui verò ad K, L recti. reliquus igitur angulus reliquo est æqualis: & ut KH ad HE, ita HL ad HG: & permutando ut KH ad HL, ita EH ad HG. quare ex ijs, quæ in antecedenti theoremate demonstrata sunt, rectangulum EHG ad rectangulum KHL, hoc est ad quadratum FH erit, ut quadratum EG ad quadratum KL, hoc est ut quadratum diametri sectionis EG ad quadratum diametri basis.* B 15. primi. 4. sexti.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XIV.

RECTA linea, quæ per punctum, quod diametrum sectionis bifariam dividit, ordinatim in sectione applicatur, secunda diameter erit.

SIT sectionis EFG diameter EG, quæ bifariam secetur in H: & FHM ordinatim applicetur. Dico FM secundam diametrum esse sectionis. Ducatur enim linea NOX æquidistans EG: & ducantur NP, XR ipsi FM æquidistantes: ergo & NP, XR ordinatim applicatæ sunt. Itaque quoniam quadratum NP ad rectangulum EPG eandem habet proportionem, quàm quadratum diametri basis cylindri ad quadratum diametri sectionis; & habet quadratum XR ad rectangulum ERG hanc eandem proportionem: erit ut quadratum NP ad rectangulum EPG, ita quadratum XR ad rectangulum ERG; & permutando. est autem quadratum NP æquale quadrato XR; parallelogrammum enim est NPRX. ergo & rectangulum EPG æquale est rectangulo ERG. & ablata sunt ab æqualibus quadratis EH, HG. quare reliquum quadratum PH reliquo quadrato HR æquale erit. æqualis igitur est PH ipsi HR, hoc est NO ipsi OX. eadem ratione & aliæ omnes ipsi EG æquidistantes ab FM bifariam secabuntur. ergo FM secunda diameter est sectionis. ex diffinitione A B



COMMENTARIVS.

ITAQVE quoniam quadratum NP ad rectangulum EPG.) *Ex antecedenti theoremate, & convertendo.* A

ET ablata sunt ab æqualibus quadratis EH, HG.) *Est enim ex quinta secundi quadratum EH æquale rectangulo EPG, & quadrato PH. & eadem ratione quadratum EH, hoc est HG æquale rectangulo ERG, & quadrato HR. quare si à quadrato EH auferatur rectangulum EPG, & ab ipso HG quadrato auferatur ERG rectangulum æquale ipsi EPG, ut demonstratum est; erit reliquum reliquo æquale, hoc est quadratum PH quadrato HR: & iccirco linea PH ipsi HR æqualis erit.* B

THEO-

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

SI cylindrus plano secetur basis planum secante; communis autem sectio plani basis, & secantis plani perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam, quæ in rectum ipsi constituitur: quæ à sectione ad diametrum ducitur linea, æquidistans communi planorum sectioni iam dictæ, poterit spatium quoddam, ad quod rectangulũ diametri partibus contentum eam proportionem habet, quàm diametri sectionis quadratum ad quadratum secundæ diametri; quæ verò à sectione ad secundã diametrum ducitur, æquidistans diametro, poterit spatium, ad quod rectangulũ ex secundæ diametri partibus eam habet proportionẽ, quàm quadratũ secundæ diametri, ad ipsum diametri quadratum.

SIT cylindrus; & construantur omnia, sicut in decimo tertio theoremate. Quoniam igitur ostensum est rectangulum E H G ad quadratum F H ita esse, ut quadratum E G ad quadratum diametri basis, hoc est ad quadratum eius, quæ ordinatim applicata bifariam secat ipsam E G, ut demonstratum est in nono theoremate. quæ autem ordinatim applicatur & bifariam diametrum secat, secunda diameter est, ex præcedenti theoremate. ergo ut quadratum diametri E G ad quadratum secundæ diametri, ita rectangulum E H G ad quadratum F H; quod ostendisse oportebat. Sed ponatur punctum H bifariam secare diametrum E G, & lineam F H V ordinatim applicatam: erit F V secunda diameter. ducatur autem ad ipsam linea M N æquidistans E G. Dico rectangulum V N F ad quadratum M N eam proportionem habere, quàm quadratum V F secundæ diametri ad quadratum diametri sectionis E G. Ducatur per lineam M N planum æquidistans parallelogrammo C D, per axem cylindrum secanti; faciet id sectionem parallelogrammum, quod sit R S: & communes sectiones ipsius, & æquidistantium planorum sint S T, X O, P R; ipsius verò, & plani sectionis E F G communis sectio M N. Itaque quoniam æquidistantia plana C D, R S secantur à plano K F L: communes eorum sectiones æquidistantes erunt. æquidistans est igitur H K ipsi N X. erat autem & H E ipsi N M æquidistans. ergo angulus K H E æqualis est angulo X N M: & cùm parallelogrammum S R parallelogrammo C D æquiangulum sit, quod demonstravimus in tertio theoremate; angulus S P R angulo E C A æqualis erit, hoc est S X O ipsi E K H. similia igitur triangula sunt E K H, M X N. quare ut K H ad H E, ita X N ad N M; & ut quadratum K H ad quadratum H E, hoc est ut quadratum V F secundæ diametri ad quadratum diametri E G, ita quadratum X N ad N M quadratum. sed quadratum X N æquale est rectangulo V N F; quòd K F L circulus sit, & H F perpendicularis ad K H, X N. ut igitur quadratum V F secundæ diametri ad quadratum diametri E G, ita rectangulum V N F ad quadratum M N. quod proposuimus demonstrandum.

3. huius.

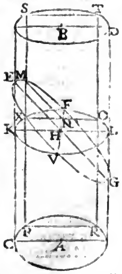
10. unde:

4. sexti.

22

15. quinti.

8. & 17. sexti.

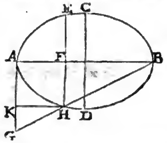


THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

SI in cylindri sectione coniugatæ diametri sint; & fiat ut dia-

meter ſectionis ad ſecundam diametrum, ita ſecunda diameter ad aliam quampiam: quæ à ſectione ad diametrum ordinatim applicata eſt, poterit ſpatium, quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam, quæ inter ordinatim applicatam & ſectionem interijcitur; & deficiens figura ſimili ei, quæ diametro ipſa & tertia proportionali continetur.

SIT cylindri ſectio, cuius diameter quidem A B, ſecunda verò diameter CD; & fiat ut A B ad C D, ita C D ad A G; apteturque A G ipſi A B ad rectos angulos: & iuncta B G, applicetur E F ordinatim ad A B, & ducatur F H ipſi A G æquidiſtans, & H K æquidiſtans A F. Dico quadratum E F æquale eſſe rectangulo A H. Eſt enim ut quadratum A B ad C D quadratum, ita linea A B ad ipſam A G, hoc eſt B F ad F H. ut autem quadratum A B ad quadratum C D, ita rectangulum B F A ad quadratum E F: & ut B F ad F H, ita B F A rectangulum ad rectangulum HFA, hoc eſt ad A H rectangulum. quadratum igitur EF æquale erit rectangulo A H; quod quidem adiacens tertiæ proportionali A G latitudinem habet A F, & deficit figura G K H, ipſi G A B ſimili. Vocetur autem A B tranſverſum figuræ latus, & A G latus rectum. A



Ex quibus manifeſtè conſtat, cylindri ſectionem A B C ellipſim eſse. B

Quæcunque enim hoc loco demonſtrata ſunt ineſſe ipſi ſectioni, omnia ſimiliter & coni ellipſi inſunt, ut demonſtratum eſt in Elementis conicis, theoremate quinto decimo, ijs, qui eius theorematis vim diligenter perceperint. & nos in noſtris in idipſum commentarijs geometricè demonſtravimus.

COMMENTARIVS.

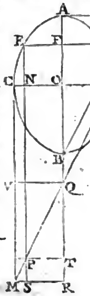
A EST enim ut quadratum A B ad C D quadratum, ſic linea A B ad ipſam A G.) *Cùm enim ſint tres lineæ proportionales A B, C D, A G; erit ut quadratum A B ad quadratum C D, ita linea A B ad lineam A G, hoc eſt B F ad F H: quoniam triangulum BFH ſimile eſt triangulo B A G. & ex antecedente ut quadratum A B ad quadratum C D, ita rectangulum B F A ad quadratum E F. quare rectangulum B F A ad quadratum E F eſt, ut B F ad F H. ut autem B F ad F H, ita & B F A rectangulum ad rectangulum H F A, hoc eſt ad rectangulum A H. ergo quadratum E F rectangulo A H æquale erit.* cor. 20. ſexti. 4. ſexti. 11. quinti. 1. ſexti. 8. quinti.

B Ex quibus manifeſtè conſtat, cylindri ſectionem A B C. ellipſim eſſe.) *Sumit hoc loco Serenus in ellipſi lineam, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ad diametrum ordinatim applicantur, eſſe eam, ad quam ſecunda diameter eandem proportionem habet, quam diameter ad ipſam ſecundam diametrum: quod quidem dicit elici poſſe ex quintadecima primi Conicorum Apollonij; ſi quis diligenter eius theorematis vim introſpiciat; additque ſe idipſum demonſtraſſe in ſuis in Apollonium commentarijs: ſed quoniam ea ad manus noſtras non pervenerunt; nos illud idem tentabimus, Apollonij veſtigijs inſiſtentes.*

SIT ellipſis, cuius diameter A B, ſecunda diameter C D; & ſiat ut A B ad C D, ita C D ad A G, quæ in puncto A aptetur ipſi A B ad angulos rectos; & iungatur B G: ſumpto autem in ellipſi puncto E, ab eo ad diametrum ordinatim applicetur E F; & ab F ad B G ducatur F H, æquidiſtans ipſi A G: deinde à punctis H, G æquidiſtantes

ipſi

ipsi A F ducantur; H K quidem ad A G, G L verò ad ipsam F H protractam. Dico quadratum lineæ E F æquale esse rectangulo A F H, quod adiacet tertiæ proportionali A G, latitudinem habens A F, & deficiens figura G L H simili ei, quæ B A G continetur. Fiat enim ut C D ad A B, ita A B ad C M; ponaturque C M ad angulos rectos ipsi C D; & iungatur M D: à puncto autem E ad C D ordinatim applicetur E N; & ab N, & à centro ellipsis, ubi est punctum O, ad M D ducantur N P, O Q æquidistantes ipsi C M; completoque parallelogrammo C M R O, producatur N P usque ad M R in punctum S: denique per P, Q æquidistantes ipsi C D ducantur P T ad O R, & Q V ad C M. erit quadratum A O æquale rectangulo C Q, ex ijs, quæ demonstrata sunt ab Apollo-
4.sexti. *nio in quinta decima propositione iam dicta. Et quoniam ut D C ad C M, ita D O ad O Q, & Q V ad V M. atque est D O ipsi O C æqualis, hoc est ipsi Q V. & O Q, hoc est C V ipsi V M æ-*
1.sexti. *qualis erit. quare rectangulum C Q æquale est rectangulo V R,*
43.primi. *& rectangulum N V ipsi V S. & cùm rectangula V P, P R inter se æqualia sint; apposito utrique communi M P, erit V S æquale M T. sed V S demonstratum est æquale ipsi N V. ergo N V, M T æqualia sunt. & rursus communi apposito V T, totum M Q, hoc est Q C æquale utrisque C P, P Q. quare Q C excedit C P ipso P Q, quod continetur P T Q. est autem C Q quadrato A O æquale, & C P æquale quadrato E N. quadratum igitur A O excedit quadratum E N rectangulo P T Q.*
5.secundi. *itaque quoniam A B secatur in partes æquales in O, & in partes inæquales in F; erit rectangulum B F A unà cum quadrato F O, hoc est E N æquale quadrato A O: & propterea quadratum A O excedet quadratum E N, rectangulo B F A. excedebat autem ipso P T Q rectangulo. quare rectangulum P T Q æquale est ipsi B F A. præterea quoniam ut A B ad C D, ita C D ad*
cor.20.sexti. *A G: erit ut B A ad A G, ita quadratum A B ad quadratum C D, hoc est quadratum A O ad quadratum O D. est autem quadrato A O æquale rectangulum Q O C, hoc est*
15.quinti. *Q O D. ut ergo B A ad A G, hoc est B F ad F H, hoc est rectangulum B F A ad rectangulum A F H, ita rectangulum Q O D ad quadratum O D, hoc est rectangulum Q T P ad quadratum T P. at rectangulum Q T P æquale est rectangulo B F A, ut demonstratum*
9.quinti. *est. quare quadratum T P, hoc est quadratum E F rectangulo A F H æquale erit. ex quibus sequitur lineam A G eam esse, iuxta quam possunt, quæ à sectione ad diametrum ordinatim applicantur. quod demonstratum volebamus.*



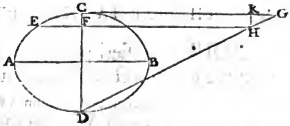
THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

SI in cylindri sectione coniugatæ diametri sint; & fiat ut secunda diameter ad diametrũ ita diameter ad aliã lineã: quæ à sectione ad secundam diametrum ordinatim applicatur, poterit spatium, quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam, quæ inter ordinatim applicatam, & sectionem interijcitur; & deficiens figura simili ei, quæ secunda diametro, & tertia proportionali inventa continetur.

SIT cylindri sectio A B C D; & fiat ut C D secunda diameter ad diametrum A B, ita A B ad C G; ponaturque C G ad rectos angulos ipsi C D; & D G iungatur: deinde ad

ad

ad C D ordinatim applicetur E F; & ducatur F H quidem ipsi C G æquidistans; H K verò æquidistans C D. Dico quadratum E F parallelogrammo C H æquale esse. Quoniam enim ut quadratum C D ad quadratum A B, ita linea D C ad ipsam C G, hoc est D F ad F H. sed ut quadratum C D ad quadratum A B, ita rectangulum D F C ad quadratum E F; quod demonstratum iam est: ut autem D F ad F H, ita rectangulum D F C ad rectangulum H F C, hoc est ad C H. ergo quadratum E F æquale est rectangulo C H; quod quidem adiacet tertiæ proportionali C G, latitudinem habens F B, & deficiens figura H K G simili ei, quæ D C G continetur. 15. huius. 1. sexti. 9. quinti.

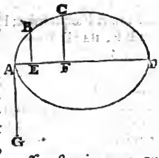


HÆC autem manifestissimè insunt ellipsi, ut ex quinto decimo theoremate Conicorum apparet. quare sequitur sectionem cylindri A B C D necessariò ellipsim esse.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

SI in sectione cylindri rectæ lineæ ad diametrum ordinatim applicentur: erunt quadrata earum ad spatia contenta lineis, quæ inter ipsas & terminos transversi lateris figuræ interijciuntur, ut rectum figuræ latus ad transversum; inter sese verò ut spatia, quæ lineis similiter sumptis continentur.

SIT cylindri sectio A B C D; cuius diameter quidem, & transversum figuræ latus A D; rectum verò latus A G: & ad ipsam A D ordinatim applicentur B E, C F. Dico quadratum B E ad rectangulum A E D ita esse, ut G A ad A D: & quadratum B E ad C F quadratum, ut rectangulum A E D ad rectangulum A F D. Quoniam enim ut quadratum secundæ diametri ad diametri quadratum, ita est quadratum B E ad rectangulum A E D; & A G rectum latus ad transversum A D: erit ut rectum latus ad transversum, ita B E quadratum ad rectangulum A E D: & ita similiter quadratum C F ad rectangulum A F D. quare & permutando ut quadratum B E ad C F quadratum, ita erit rectangulum A E D ad rectangulum A F D. quod demonstrandum proponebatur. Et hæc in ellipsi contingere demonstratum est in Conicis Elementis, theoremate vigesimo primo. quanquam & ex alijs multis sectiones easdem esse ostendere possumus per ea, quæ ipsis communiter accidunt: verùm principaliora accidentia ferè dicta sunt; & cùm hucusque progressus fuerim; non ad me attinet eorum, quæ relinquuntur, singula persequentem in alienis versari. necesse est enim eum, qui de ellipsi subtiliter disputare velit, in medium afferre quæcunque de ipsa ab Apollonio Pergæo conscripta fuerunt. Sed si cui fortè placet ulteriùs contemplari; licebit hæc comparare cum eis, quæ in primo Conicorum libro traduntur: & ex eo illud, quod propositum est, concludere. etenim quæcunque in illis contingunt circa coni sectionem, quæ ellipsis appellatur; eadem & circa sectionem cylindri contingere, ex ijs, quæ hoc loco demonstrata sunt, facilè intelliget. quare ab his abstinens, cùm lemmata 15. huius.

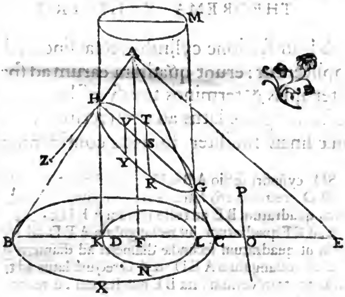


tia nonnulla apposuero, quæ sectiones easdem esse quodammodo ostendunt; ad alia me convertam.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

ITAQUE dico fieri posse, ut conum simul & cylindrum una eademque ellipsi sectos ostendamus.

EXPONATVR triangulum scalenum A B C in basi B C, quæ bifariam in D secetur; sitque A B maior, quàm A C; & ad rectam lineam C A, & ad A punctum constituatur angulus C A E, qui vel maior sit angulo A B C, vel minor: occurrat autem A E lineæ B C E in puncto E; & inter B E, E C media proportionalis sit E F: iunctaque A F, ducatur in triangulo linea H G ipsi A E æquidistans; & per puncta H, G ducantur H K, L G M, æquidistantes A F; & compleatur parallelogrammum K M: deinde per lineam B E ducto plano ad rectos angulos ipsi plano B A C, describatur in eo circa diametrum quidem K L circulus K N L, qui cylindri basis erit, & eius parallelogrammum per axem K M; circa diametrum verò B C describatur circulus B X C pro basi coni, cuius triangulum per axem sit A B C; & protracta H G ad O, ducatur in circulorum plano linea O P ad rectos angulos ipsi B E; perque O P, O H ducatur planum, quod faciet sectionem in cono, cuius basis circulus B X C: sit autem ea sectio H R G. ergo recta linea H G diameter est sectionis: qua quidem bifariam divisa in S, ad ipsam ordinatim applicentur secunda diameter R S T, & alia quævis Y V: fiatque ut quadratum H G diametri sectionis H R G ad quadratum R T secundæ diametri eiusdem sectionis, ita G H transversum figuræ latus ad rectum H Z. Quoniam igitur H K quidem ipsi A F æquidistat; H O verò æquidistat A E: erit ut quadratum A E ad quadratum E F, ita H O quadratum ad quadratum O K. sed ut quadratum A E ad rectangulum B E C, hoc est ad quadratum E F, ita quadratum H G diametri sectionis coni ad quadratum R T secundæ diametri eiusdem sectionis: ut autem quadratum H O ad quadratum O K, ita quadratum H G ad quadratum K L, hoc est ita quadratum H G diametri sectionis cylindri ad quadratum secundæ diametri eiusdem cylindri sectionis, sicut demonstratum est superiùs. quare secunda diameter sectionis cylindri æqualis est ipsi R T secundæ diametro sectionis coni: dividiturque H G bifariam in puncto S, & ipsi ad rectos angulos ducitur secunda diameter cylindri sectionis, quemadmodum & ipsa R T. ergo R T secunda diameter est tum coni, tum cylindri sectionis. similiter & H G est diameter coni sectionis & cylindri: & propterea punctum R in coni & cylindri superficie erit. rursus quoniam in sectionibus coni & cylindri eædem diametri sunt H G, R T: & tertia proportionalis eadem erit, hoc est H Z rectum latus figuræ. quare H Z & in cylindri sectione rectum est figuræ latus. quoniam igitur ut G H ad H Z, ita rectangulum G V H ad quadratum V Y. atque ostensum est in cylin-

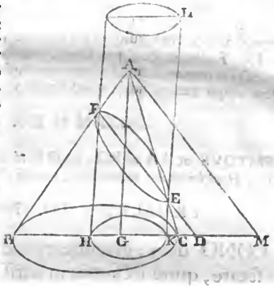


lindri ſectione ut tranſverſum figuræ latus ad rectum, ita rectangulum diametri partibus contentum ad quadratum eius, quæ ad ipſam ordinatim applicata partes efficit. erit & in cylindri ſectione ut G H tranſverſum figuræ latus ad H Z rectum, ita rectangulum G V H ad quadratum lineæ æqualis Y V, & ad angulos æquales ductæ ad H G. ſed linea æqualis Y V, & ad æquales angulos ad ipſam ducta in punctum V, non alia eſt ab ipſa Y V. ergo V Y & in cylindri ſectione erit: ac propterea punctum Y in coni ſuperficie exiſtens, & in cylindri erit ſuperficie. ſimiliter demonſtratio fiet & in alijs, quæ ad ipſam ordinatim applicabuntur. linea igitur H A G in ſuperficiebus utrarunque figurarum continetur. quare una eademque ſectio eſt in utriſque figuris. præterea quoniam angulus C A E, videlicet A G H factus eſt, vel maior, vel minor angulo, qui ad B; ſectio non erit ſubcontraria: ideoque H R G non eſt circulus. ellipſis igitur. quare coni expoſiti, ac cylindri ſectio eadem ellipſis erit. quod oportebat demonſtrare.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XX.

CONO dato & ellipſi, in eo cylindrum eadem ellipſi coni ſectum invenire.

SIT datus conus, cuius per axem triangulum ſit A B C; & data in ipſo ellipſis, cuius diameter F E; quæ protrahatur ad D: & ipſi F D æquidiſtans ducatur A M; interque B M, M C proportionalis ſit M G; & iuncta A G, per puncta F, E ducantur F H, K E L, quæ ipſi A G æquidiſtent; & compleatur parallelogrammum H L. Itaque ſi intelligamus cylindrum, cuius baſis quidem ſit circulus circa diametrũ H K; parallelogrammum verò per axẽ H L: erit & in ipſo cylindro ſectio, cuius diameter F E: & ſimiliter, atque in antecedenti theoremate, demonſtrabimus ſecundam diametrum eandem eſſe; & item omnes, quæ ad diametrum ordinatim applicantur. inventus igitur eſt cylindrus, qui ſecatur data ellipſi coni dati. quod facere oportebat.

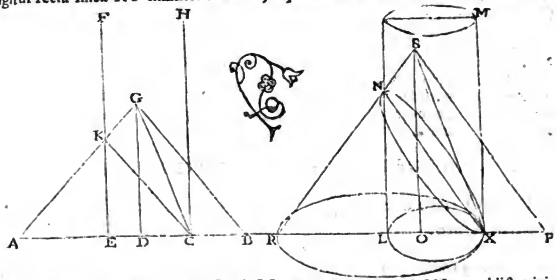


PROBLEMA II. PROPOSITIO XXI.

CYLINDRO dato & ellipſi, in eo conum eadem ellipſi cylindri ſectum invenire.

EXPONATVR ſeorſum recta linea A B; & in ea ſumatur quodvis punctum D; fiatque ut A B ad B D, ita D B ad B C; ut autem A B ad B C, ita A D ad D E: & à punctis E, D, C attollantur rectæ lineæ E F, D G, C H, quæ cum ipſa A B quemlibet angulum contineant; & inter ſeſe æquidiſtent: deinde per C ducatur recta linea C K ſecans E F, D G; iunctaque A K conveniat cum D G in puncto G; & iungatur G B. His igitur ſeorſum in hunc modum conſtitutis, ſit datus cylindrus, cuius parallelogrammum per axem L M; & datæ in eo ellipſis diameter ſit N X; ſecetur-

que L X basis parallelogrammi in eandem proportionem, in quam secta est E C; & fit ut E D ad D C, ita L O ad O X: rursus fiat ut E C ad C B, ita L X ad X P; ut autem C E ad E A, ita X L ad L R; & per O ducatur O S æquidistans parallelogrammi lateribus: ductaque R N conveniat cum O S in S; & iungantur S P, S X. Quoniam igitur recta linea R P similiter secta est, atque A B: erit ut R P ad P O, ita O P ad



P X. sed ut R P ad P X, ita R O ad O L, hoc est ita R S ad S N. æquidistat igitur S P ipsi N X. Quòd si intelligamus conum, cuius quidem basis sit circulus circa diametrum R X, triangulum verò per axem S R X; erit & in eo sectio, cuius diameter N X. Eodem modo, quo supra, demonstrabitur & secundam diametrum eandem esse; & omnes, quæ ad diametrum ordinatim applicantur. conus igitur sectus est eadem ellipsi dati cylindri, quod fecisse oportuit.

COMMENTARIVS.

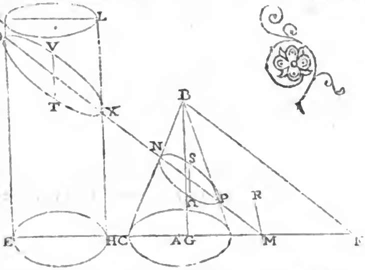
A FIATQVE ut A B ad B D, ita D B ad B C; ut autem A B ad B C, ita A D ad D E.) *Hunc locum nos restituimus, nam in Græco codice non nulla desiderabantur.*

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXII.

CONO dato, invenire cylindrum; & utrosque eodem plano secare, quod sectiones in utrisque similes ellipses efficiat.

SIT conus datus, cuius basis quidem circulus circa centrum A, vertex B punctum, triangulum verò per axem C B D, ad basim coni rectum; producaturque in utranque partem A C E, A D F; & ad rectam lineam D B, & ad B punctum in ipsa constituatur angulus D B F, vel maior, vel minor ipso B C D; atque inter C F, F D media proportionalis sumatur F G; & B G iungatur: cylindri autem quæsiti basis sit, vel circulus A, vel alius aliquis in eodem plano existens, nihil enim differt. itaque sit is circulus circa diametrum E H: & per puncta E, H ipsi B G æquidistantes ducantur E K, H L. in eodem igitur plano sunt, in quo triangulum C B D. & quòniam B F secat B G: si producatur; secabit etiam omnes, quæ ipsi B G æquidistant, in infinitum productas. & similiter ipsi B F æquidistantes secabunt eas, quæ æquidistant B G. ducatur M N, quæ ipsi B F æquidistet; & producta secet H L, E K in punctis X, O: ipsi verò E H æquidistans ducatur K L; & circa K L diametrum circulus describatur æquidistans ei, qui est circa E H: intelligaturque cylindrus, cuius bases quidem circuli

li E H, K L; parallelogrammum verò per axem K H, quod & ad basim rectum est. si igitur per M ducatur linea M R ad rectos angulos ipsi C D F basi, quæ sit in eodem plano, in quo circulus A; & per lineas M R, M O planum ducatur: faciet id sectionem in cono quidem ellipsim N S P, cuius diameter N P; in cylindro verò ellipsim O V X, cuius diameter O X. Dico ellipsim N S P ipsi O V X similem esse. Quoniam enim O M, B F inter se æquidistant; itemque æquidistant E K, H L, B G; & linea E F communiter omnes secat: erit ut O M ad ME, hoc est ut O X ad HE, ita B F ad F G. quare ut quadratum O X ad quadratum H E; ita B F quadratum ad quadratum FG, hoc est ad rectangulum C F D. sed ut quadratum O X diametri ad quadratũ H E, ita quadratum diametri O X ad quadratum coniugatæ diametri, videlicet V T.

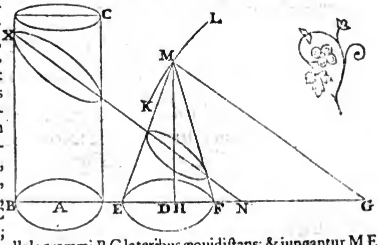


ut autem quadratum B F ad rectangulum C F D, ita quadratum diametri N P ad quadratum coniugatæ diametri S Ω. ergo ut quadratum O X ad quadratum V T, ita quadratum N P ad S Ω quadratum: ac propterea ut O X ad coniugatam diametrum V T, ita N P ad diametrum coniugatam S Ω. At verò diametrum O X secare V T ad rectos angulos; itemque N P similiter secare S Ω, manifestè apparet: quoniam T V, Ω S, & inter se se, & ipsi M R æquidistantes recta linea M O secat. sectio igitur O V X similis est sectioni N S P: & neutra earum est circulus, quippe cùm sectio subcontraria non sit. angulus enim D B F, videlicet B P N non est æqualis angulo B C D. quare utraque sectionum O V X, N S P ellipsis erit: & sunt similes inter sese. quod fecisse oportebat.

PROBLEMA IV. PROPOSITIO XXIII.

CYLINDRO dato, invenire conum; & utrosque secare eodem plano, quod sectiones faciat in utrisque ellipses similes.

SIT cylindrus datus, cuius basis circulus A, & parallelogrammum per axem BC, ad basim rectum; & producatur BA: coni verò quæsiti basis sit, vel circulus A, vel alius aliquis in eodem exiſtens plano, ut qui est circa diametrum EF, cuius centrum D: & sumpto quovis puncto G in linea FG, inter EG, GF media proportionalis sit GH; & cẽtro G, intervalloque vel maiore, vel minore, quàm sit GH, describatur in plano B C circuli circunferentia K L;



perque H ducatur HM parallelogrammi B C lateribus æquidistans; & iungantur M E, A

MF,

M F, M G: postea ducatur N X ipsi M G æquidistans, quæ triangulum, & parallelogrammum secet. Itaque si per N X eodem modo, quo ante dictum est, planum ducatur, sectio in utroque similis erit. demonstratio autem eadem, quæ supra: verùm sectiones ellipses esse, non circulos, perspicuè constat. quadratum enim M G factum est vel maius, vel minus quadrato G H, hoc est rectangulo E G F.

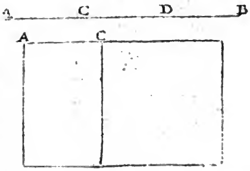
COMMENTARIVS.

A PERQVE H ducatur H M, parallelogrammi B C lateribus æquidistans.] *Hoc est ducatur à puncto H linea ad circuli descripti circumferentiam in punctum M, quæ lateribus parallelogrammi B C sit æquidistans: ut autem hoc fiat, licet semper intervallum sumere maius, quàm G H, minus non item; nisi cùm cylindrus scalenus fuerit, & ita inclinatus ad partes coni, ut illud ipsum, quod diximus, perfici possit. Itaque oportet intervallum vel maius esse, vel minus ipsa G H. nam si sumeretur æquale; sectiones subcontrariæ essent: & iccirco non ellipses, sed circuli in sectione gignerentur.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIV.

SIT recta linea A B, quæ secetur in punctis C, D; & non sit A C maior, quàm D B. Dico, si ad A C comparetur spatium æquale quadrato C B, excedens figura quadrata; latus excessus maius quidem esse, quàm C D; minus verò, quàm C B.

SI enim fieri potest; ponatur C D primùm latus esse excessus. Et quoniam id, quod ad A C comparatur, excedens quadrato CD, idem est, quod rectangulum A D C. est autem & æquale quadrato C B. erit rectangulum A D C quadrato C B æquale. sed quadratum C B non est minus quadrato A D: cùm enim D B non sit minor, quàm A C; neque erit C B minor, quàm ipsa A D. rectangulum igitur A D C quadrato A D non est minus; quod fieri non potest. Idem absurdum sequetur; si latus excessus ponatur minus, quàm C D. Sed rursum sit C B excessus latus: erit rectangulum A B C quadrato C B æquale. quod fieri non potest. Idem sequetur etiam, si latus excessus ponatur maius ipsa C B. latus igitur excessus maius erit, quàm C D; & minus, quàm C B.

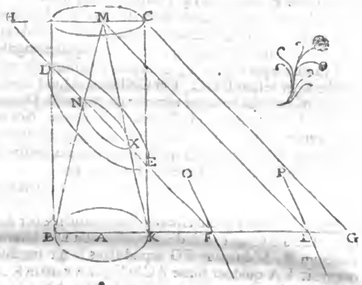


PROBLEMA V. PROPOSITIO XXV.

DATO cylindro ellipsi secto, conum constituere in eadem basi cylindri, eademque altitudine; & sectum eodem plano, quod sectionem faciat ellipsim, cylindri ellipsi similem.

SIT datus cylindrus, cuius basis quidem circulus circa centrum A, parallelogrã-mum verò per axem B C; & in eo diameter datæ ellipsis sit D E, quæ producta occurrat B A in F: perque C ducatur C G ipsi D F æquidistans, & occurrens lineæ B A in G; & protracta recta linea F D H, compleatur parallelogrammum. Quoniã igi-

igitur parallelogrammi H G latus F G lateri H C est æquale. latus autem H C non est minus ipsa B K. neque F G ipsa B K minor erit. si igitur ad lineam B K comparetur spatium æquale quadrato K G, excedens figura quadrata; latus excessus maius erit quàm K F, & minus quàm K G, ex ijs, quæ proximè demonstrata sunt. itaque sit latus excessus K L; & per L ipsi G C æquidistans ducatur L M: & iunctis M B, M K, intelligatur conus, cuius vertex punctum M, basis circulus A, & triangulum per axem B M K. si igitur intelligamus conum sectum eodem plano, à quo facta est E D diameter sectionis cylindri; erit & in cono sectio, cuius diameter N X. Et quoniam ad lineam B K comparatum est spatium æquale quadrato K G, excedens quadrato K L: rectangulum B L K quadrato K G æquale erit. & sunt D B, K C inter se æquidistantes: itemque æquidistantes D F, M L, C G. ut igitur D F ad F B, ita C G ad G K: & iccirco ut quadratum D F ad quadratum F B, ita quadratum C G ad quadratum G K, hoc est quadratum M L ad rectangulum B L K. sed ut quadratum D F ad quadratum F B, ita quadratum E D ad quadratũ B K, hoc est quadratum diametri ellipsis cylindri E D ad quadratum coniugatæ diametri: & ut quadratum M L ad rectangulum B L K, ita quadratum diametri ellipsis coni ad coniugatæ diametri quadratum. ergò ut quadratum diametri ellipsis cylindri ad quadratum coniugatæ diametri, ita diametri ellipsis coni quadratum ad quadratum coniugatæ diametri. ut igitur diameter ellipsis cylindri ad coniugatam diametrum, ita ellipsis coni diameter ad coniugatam diametrum. sunt autem secundæ diametri perpendiculares ad diametros; utræque enim æquidistant lineis F O, L P, quæ sunt ad rectos angulos ipsi B G. quare coni ellipsis ellipsi cylindri similis erit: & facta est ab eodem plano; constitutusque est conus in eadem basi, & eadem altitudine. quæ omnia fecisse oportebat.



B C (margin)

COMMENTARIVS.

A COMPLEATVR parallelogrammũ.) *Hæc addidimus, quæ in Græco codice non erant.*

B Ad quadratum coniugatæ diametri.) *Desiderabantur hæc in Græcis codicibus.*

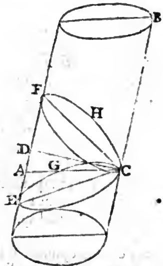
C Ita ellipsis coni diameter ad diametrum coniugatam.] *Hæc etiam desiderabantur, quæ nos restituimus.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXVI.

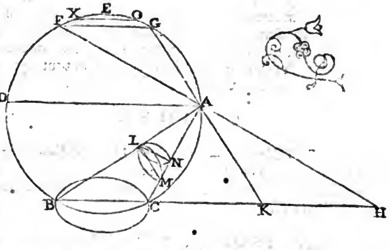
DATUM cylindrum, vel conum scalenum possumus ex eadem parte infinitè secare duobus planis, non æquidistanter positis, quæ ellipses similes efficiant.

SIT primùm datus cylindrus scalenus; cuius per axem parallelogrammum A B re-

rectum ſit ad baſim cylindri; ponaturque angulus ad A acutus: & per C ducatur C D ad latus A D perpendicularis. minima igitur eſt C D omnium, quæ inter æquidiſtantes A D, C B cadunt. ſumantur ex utraque parte puncti D æquales rectæ lineæ E D,
4. primi Elementorum. D F; & E C, C F iungantur. erit E C ipſi C F æqualis. ſi igitur per E C, C F iuxta prædictum modum plana ducantur; ſecabunt cylindrum. itaque ſecent, & faciant
7. quinti. ellipſes E G C, F H C. Dico eas inter ſe ſimiles eſſe. Quoniam enim ut quadratum E C ad quadratum C A, ita quadratum F C ad quadratum
9. huius. C A. proportio autem quadrati E C ad quadratum C A eſt proportio quadrati E C diametri ſectionis ad quadratum coniugatæ diametri; & proportio quadrati F C ad quadratum CA eſt proportio quadrati diametri ſectionis F C ad quadratum coniugatæ ipſi diametri. erit ut E C diameter ad coniugatam diametrum, ita & diameter F C ad coniugatam ſibi ipſi diametrum. ſed & ad æquales angulos ſecantur utræque diametri, ut ſæpius oſtenſum eſt. ergo ſimiles inter ſe ſunt E G C, F H C ellipſes. Quòd ſi alias ſumpſeris æquales lineas ex utraque parte puncti D; rurſus aliæ duæ ellipſes inter ſe ſimiles conſtituentur. Notandum autem eſt in cylindro ellipſes ex eadem parte ſimiles & æquales eſſe: propterea quòd proportio diametrorum ad eandem lineam A C neceſſariò eadem ſit.



SED ſit datus conus ſcalenus, cuius per axem triangulum A B C, ad baſim coni rectum; ſitque A B maior quàm A C; & circa ipſum circulus deſcribatur; & per A ducatur A D æquidiſtans B C, quæ circulum ſecabit: deinde circunferentia D A bifariam ſecta in E, ſumatur in ipſa punctum F; & ducatur F G æquidiſtans D A: iunctiſque F A, G A, & productis, occurrat F A quidem lineæ B C in H; G A verò in K. ergo ut A K ad K G, ita A H ad H F. ſed ut A K ad K G, ita quadratum A K ad rectangulum G K A: & ut A H ad H F, ita quadratum A H ad rectangulum F H A. ut igitur quadratum A K ad re-
36. tertii. ctangulum G K A, hoc eſt ad rectangulum B K C, ita quadratum A H ad rectangulum F H A, hoc eſt ad rectangulum B H C. Itaque ſi ducantur rectæ lineæ æquidiſtantes, L M quidem æquidiſtans A K; L N verò æquidiſtans A H: & per ipſas plana conum ſecātia; ſimiles ellipſes efficientur. Quoniam enim ut quadratum A K ad rectangulum BKC, ita quadratum L M diametri ellipſis ad quadratum coniugatæ diametri: & ut quadratum A H ad rectangulum B H C, ita quadratum L N diametri ellipſis ad coniugatæ ipſi diametri quadratum. erit ut diameter L M ad coniugatam diametrum, ita L N diameter ad diametrum ipſi coniugatam: & iccirco L M, L N ſimilium ellipſium diametri ſunt. quod demonſtrandum fuerat. At ſi alias lineas ipſi F G æquidiſtantes ducamus, ut X O; & à punctis X, O lineas iungentes protrahamus ad B H; & ipſis æquidiſtantes in triangulo ducamus: rurſus duæ aliæ ellipſes inter ſe ſimiles conſtituentur: atque hoc in infinitum. quod facere oportebat.

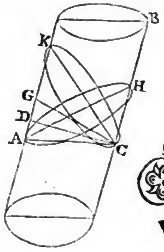


PRO-

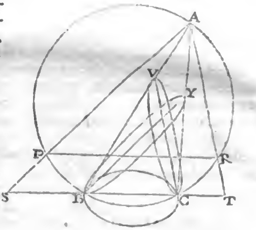
PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXVII.

DATUM cylindrũ ſcalenum vel conũ poſſumus ex oppoſitis partibus infinitè ſecare duobus planis, quæ ellipſes ſimiles efficiãt.

SIT primùm cylindrus, ut in ſuperiori figura: & lineæ A D æqualis ponatur D G. æqualis igitur eſt A C ipſi C G. & quoniam linea, quæ à puncto A ad C B ducitur, maior eſt utraque ipſarum A C, C G; & maior omnibus, quæ à C inter puncta A G cadunt: manifeſtum eſt, ſi ex oppoſitis partibus ducantur duæ rectæ lineæ inter ſe æquales, eã, quæ à puncto C ducitur, cadere ſupra G. Itaque ducantur ex oppoſitis partibus A H, C K æquales inter ſeſe; & per ipſas plana ducantur, ellipſes facientia: erit ut quadratum H A diametri ellipſis ad quadratum A C, hoc eſt ad quadratum coniugatæ diametri, ita quadratum K C diametri ellipſis ad quadratum A C, hoc eſt ad quadratum diametri ipſi coniugatæ. ergo K C, A H ellipſium ſimilium diametri ſunt.

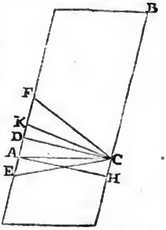


SIT deinde conus, ut ſupra: & producta C B, oporteat ex utriſque partibus ducere plana, quæ ellipſes ſimiles efficiant. Ducatur in circulo quædam recta linea P R, ipſi B C æquidiſtans: & iunctæ A P, A R ad puncta S, T producantur. Vt igitur A S ad S P, ita A T ad T R. & ut quadratum A S ad rectangulum A S P, hoc eſt ad rectangulum C S B, ita quadratum A T ad rectangulum A T R, hoc eſt ad rectangulum B T C. quare ſi rectas lineas in triangulo duxerimus, ipſis S A, A T æquidiſtantes, ut B Y, C V; & per eas plana ellipſes facientia: erunt B Y, C V ſimilium ellipſium diametri, ex ijs, quæ ſuperiùs demonſtrata ſunt.



THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXVIII.

EX his manifeſtum eſt, coniugationi ſimilium ellipſium, quæ ex eadem parte fit, ſimilẽ eſſe coniugationem quandam ſimiliũ ellipſiũ ex oppoſitis partibus; quippe quæ diametros habet, ex cõtraria parte diametris reſpondẽtes.

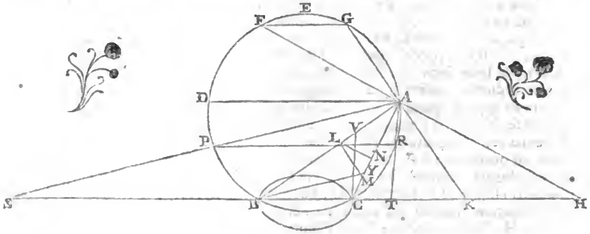


SI enim in cylindri deſcriptione fiat ut quadratum E C vel C F ad quadratum C A, ita quadratum C A ad quadratum A H vel C K; erit ut quadratum utrarunque E C, C F ad quadratum C A, hoc eſt ut quadratum diametri ſimilium ellipſium, quæ ex eadem parte fiunt, ad quadratum ſecundæ diametri coniugatæ, ita quadratum C A ad quadra-

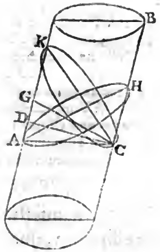
D tum

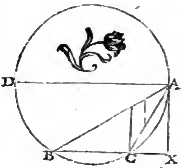
tum utrarunque A H, C K, hoc eſt ita quadratum ſecundæ diametri ſimilium ellipſium, quæ ex oppoſitis partibus fiunt, ad quadratum coniugatæ diametri. ut igitur alterius coniugationis diameter ad ſecundam diametrum, ita alterius coniugationis ſecunda diameter ad diametrum.

IN cono autem, ſi rurſus fiat ut G A ad A K, ita A P ad P S; erit ut A K ad K G, ita P S ad S A, hoc eſt ut quadratum A K ad rectangulum G K A, ita rectangulum P S A ad quadratum A S. ſed ut quadratum A K ad rectangulum G K A, hoc eſt ad re-



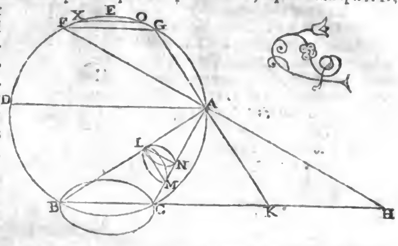
ctangulum B K C, ita quadratum diametri duarum ſimilium ellipſium, quæ ex eadem parte fiunt, videlicet L N, vel L M ad quadratum ſecundæ diametri coniugatæ: ut autem rectangulum P S A, hoc eſt C S B ad quadratum S A, ita quadratum ſecundæ diametri ſimilium ellipſium, quæ ex oppoſitis partibus fiunt, ad coniugatæ diametri quadratum. ergo ut alterius coniugationis diameter ad ſecundam diametrum, ita alterius coniugationis ſecunda diameter ad diametrum. ex quibus apparet, in omni cylindro, & cono conſtitui duas coniugationes ellipſium inter ſe ſimilium, quæ ex contraria parte reſpondentes diametros habent: & præter has quatuor nullam aliam conſtitui ſimilem, niſi ipſis æquidiſtantem [etenim ſemper ſectiones æquidiſtantes ſimiles faciunt ellipſes, ſi modo ellipſes faciunt] atque in cylindro quidem planum per lineam C G ductum ſectionem facere ſubcontrariam, & propterea circulum: in cono autem, ſi ad punctum A linea circulum contingat, ut A X; & in triangulo ducantur lineæ ipſi A X æquidiſtantes; quoniam quadratum A X rectangulo B X C eſt æquale, plana per dictas lineas tranſeuntia ſectiones facere circulos: ſiquidem & hæc ſubcontraria ſectio eſt, quod diligenter intuenti perſpicuum fiet. præterea data ellipſi in cylindro ſcaleno, & cono, tres alias ſimiles inveniri poſſe, unam quidem ipſi datæ coniugatam, duas verò coniugatas inter ſeſe, atque alijs ſimiles; propterea quòd diametros habent, ex contraria parte diametris reſpondentes. oportet autem neque datam ſectionem ſubcontrariam eſſe; huic enim nulla ſimilis conſtituitur, præter æquidiſtantes: neque ipſius diametrum æquidiſtare ei, quæ per E vel per A ducitur





in

in coni descriptione; etenim sola ipsa est: quoniam per E ducta, æquidistans ipsi A D, circulum contingit, & cadit extra; nec est aliud punctum compar puncto E, quemadmodum est O ipsi X, & F ipsi G.

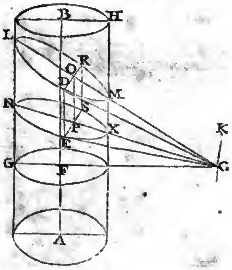


DE proposito igitur nobis theoremate hæc dicta sufficiant. Tempus est, ut ad ea aggrediar, quæ modo pollicitus sũ: mihi verò futuræ contẽplationis occasio non intempestiva fuit nempe hæc. Pitho Geometra, in quodam eius libro æquidistantes lineas explicans, non contentus ijs, quæ scripserat Euclides, eas aptissimè exẽplo declaravit. dixit enim lineas æquidistantes esse, quales in parietibus, vel pavimento columnarum umbras à lampade è regione ardente, vel lucerna factas videmus. quod tametsi omnibus non parvum risum moverit: mihi tamen ridiculũ non videtur propter meam in auctorem, qui amicus noster est, observãtiam. Sed videamus, quomodo hoc Mathematicè se habeat. talis enim contemplatio huius loci propria est; quippe cùm per ea, quæ proximè demonstrata sunt, propositum ostendatur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXI.

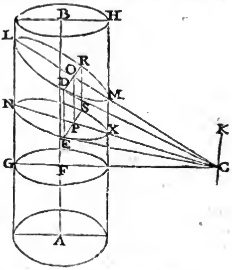
RECTÆ lineæ, quæ ab eodem puncto cylindricam superficiem contingunt ex utraque parte, omnes in unius parallelogrã-mi lateribus tactiones faciunt.

SIT cylindrus, cuius bases circuli A, B; axis A B recta linea: & sumatur aliquod punctum C extra; à quo ducantur C D, C E cylindri superficiem contingentes ex eadem parte in punctis D, E. Dico D, E puncta tactuum in una recta linea esse. Ducatur enim à puncto C ad A B linea perpendicularis C F: & per C F ducatur planum æquidistans plano circuli A, quod faciat in cylindro sectionem circulum circa centrum F; ita ut cylindrus constituatur, cuius bases B, F circuli; axisque recta linea B F: & per C F & axem planum ducatur, faciens in cylindro parallelogrammum G H; ipsi verò F C ad rectos angulos ducatur C K in F circuli plano: & per C K & utranque ipsarum C D, C E plana ducantur cylindrum secantia; quæ faciant in superficie quidem cylindri lineas L D M, N E X; in plano verò parallelogrammi L M C, N X C rectas lineas. diametri igitur sectionum sunt L M, N X; ad quas ordinatim applicentur D O, E P; & ad alteram partem superficiei in puncta R, S producantur. Itaque quoniam C D contingit lineam L D M R in puncto D. & huiusmodi sectio cylin-



dri ostensa est ellipsis, non circulus: ordinatimque applicata est D O. erit ut L C ad C M, ita L O ad O M; quod demonstratum fuit ab Apollonio in primo libro Conicorum: & eadem ratione ut N C ad C X ita N P ad P X. est autem N G ipsi H M æquidistans. quare ut L C ad C M, ita N C ad C X: & propterea ut L O ad O M, ita N P ad P X. linea igitur puncta O, P coniungens est in plano G H; & utrique ipsarum B A, H M æquidistat. & quoniam D O, E P æquidistant ipsi C K: etiam inter sese æquidistabunt. quare si per eas planum ducatur; secabit parallelogrammum H G secundùm rectam lineam O P: atque erit planum P E D O æquidistans plano alicui eorum, quæ per B A ducta secant G H. planum igitur P E D O sectionem facit in cylindro parallelogrammum, ut ostensum est theoremate tertio. & linea E D est communis sectio ipsius & superficiei cylindri. quare E D recta linea est, & parallelogrammi latus. similiter idem & in alijs contingentibus demonstrabitur; fientque rursus tactus ex altera parte in punctis R, S; quæ sunt in una linea, ipsi E D æquidistante. omnes igitur lineæ contingentes in unius parallelogrammi lateribus tactiones faciunt. quod demonstrandum proponebatur.

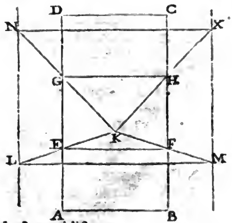
prop. 36.



THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXX.

HOC demonstrato, sit parallelogrammum A B C D; & eius basi A B æquidistantes ducantur E F, G H: sumpto autem aliquo puncto K non existente in plano parallelogrammi, iungantur K E, K F, K G, K H; quæ productæ occurrant plano cuipiam, æquidistanti ipsi A B C D, in punctis L, M, N, X; & iungantur L N, M X. Dico lineam M X ipsi L N æquidistantem esse.

PLANVM enim per lineas K L, E F ductum secabit etiam planum L M N X: & in eo communem sectionem faciet rectam lineam L M, ipsi E F æquidistantem. similiter & planum per K N, G H ductum faciet N X æquidistantem G H. Quoniam igitur L K N triãgulum ab æquidistantibus planis A B C D, 16. unde. L M N X secatur: communes ipsorum sectiones N L, G E inter se æquidistantes sunt. & eadem ratione æquidistantes X M, H F. quare ut E K ad K L, ita G K ad K N: & ut G K ad K N, ita G H ad N X. sed ut E K ad K L, ita E F ad L M. ut igitur E F ad L M, ita G H ad N X: & permutando. est autem E F æqualis G H. ergo & L M ipsi N X. & sunt æ-33. primi. quidistantes inter se. linea igitur M X ipsi L N est æquidistans.



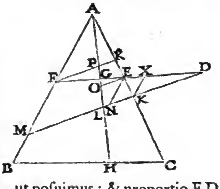
SI

SI igitur punctum K ponamus esse corpus illuminans; & A C parallelogrammum, quod eius radijs opponatur, siue per sese, siue in cylindro: continget radios, qui ab ipso K producuntur, terminari rectis lineis M L, N X; & quod intra lineas M L, N X continetur, umbrosum esse. Itaque demonstrandum iam est lineam D A ipsi C B, & N L ipsi X M æquidistare: verùm non ita apparent; nam intervallorum L M, N X quod propiùs visui est, illud maius videtur; sed hæc ex Opticis sumenda sunt. Itaque quoniam propositum est, & de cono simile contemplari; propterea quòd ellipsis communis sit & cono, & cylindro: dictum est autem de cylindro; age nunc & de cono dicamus.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXXI.

SI extra triangulum punctum sumatur; & ab eo ducatur quædam recta linea triangulum secans; à vertice autem ad basim alia agatur, quæ secet lineam ductam; ita ut quam proportionem habet tota ad partem extra triangulum assumptam, eandem habeat eius, quæ intra triangulum continetur, maior portio ad minorem: quælibet recta linea, quæ ex eodem puncto ducta triangulum secat, ab ea, quæ à vertice ad basim ducitur, in eandem proportionem secatur. Quòd si lineæ ab eo puncto in triangulum ductæ secentur in eandem proportionem: recta linea, quæ ipsas secat in triangulo, per trianguli verticem necessariò transibit.

SVMATVR enim aliquod punctum D extra triangulum A B C; à quo ducatur recta linea D E F triangulum secans; & à vertice A ad basim ducatur A G H, quæ secet F D; ita ut F D ad D E eandem proportionem habeat, quam F G ad G E: deinde ducatur alia linea D K L M. Dico ut M D ad D K, ita esse M L ad L K. Per puncta enim E, K ducantur lineæ E N, K X ipsi A B æquidistantes: & per E, F ducantur E O, F P R æquidistantes M D. Quoniam igitur in triangulo A M K ducta est E N ipsi A M æquidistans: erit ut N E ad E K, ita M A ad A K, hoc est F A ad A R. rursus quoniam F A æquidistat K X: ut E K ad K X, ita est E A ad A F. est autem ut N E ad E K, ita F A ad A R: & ut E K ad K X, ita E A ad A F. ergo ex æquali in perturbata ratione, ut E N ad K X, ita E A ad A R, hoc est E O ad P R. & quoniam proportio M D ad D K eadem est, quæ F D ad D X. proportio autem F D ad D X componitur ex proportione F D ad E D, & E D ad D X. erit proportio M D ad D K ex eisdem proportionibus composita. sed

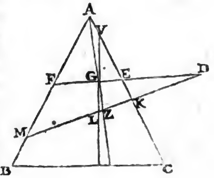


F D ad D E proportio eadem est, quæ F G ad G E, ut posuimus: & proportio E D ad D X, hoc est E N ad X K ostensa est eadem, quæ O E ad P R. ergo proportio M D ad D K componitur ex proportione F G ad G E, & proportione O E ad P R. rursus quoniam proportio M L ad L K eadem est, quæ F P ad P R. & proportio F P ad P R componitur ex proportione F P ad O E, hoc est F G ad G E, & proportione O E ad P R. proportio igitur M L ad L K composita est ex proportione F G ad G E, & O E ad P R. sed proportio M D ad D K componitur ex eisdem proportionibus

nibus, quod oſtenſum iam fuit. ergo ut M D ad D K, ita M L ad L K. Similiter & de alijs, quæ à puncto D ductæ fuerint, demonſtrabitur. omnes enim à linea A H in eandem, quam diximus, proportionem ſecabuntur.

QVOD ſi à puncto D ductæ lineæ in eandem proportionem ſecentur; ita ut quam proportionem habet F D ad D E, eandem habeat F G ad G E; & rurſus quam habet M D ad D K, habeat M L ad L K: recta linea proportionaliter ſecans eas, quæ in triangulo continentur, videlicet F E, M K, per verticem trianguli neceſſariò tranſibit.

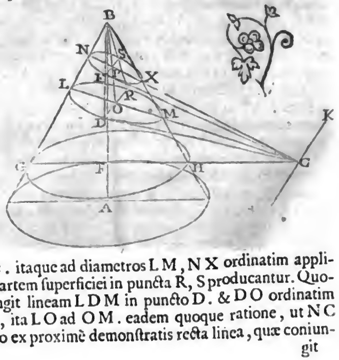
SI enim fieri poteſt; tranſeat extra verticem per punctum V: & ducatur recta linea A G Z. Quoniam igitur ex ijs, quæ proximè demonſtrata ſunt, linea quædam A Z à vertice ducta ſecat F D; ita ut quam proportionem habet F D ad D E, habeat F G ad G E: & ipſam M D in eandem proportionem ſecabit; eritque ut M D ad D K, ita M Z ad Z K; quod eſt abſurdum. poſuimus enim ut M D ad D K, ita eſſe M L ad L K. quare L G producta non tranſibit per aliud punctum, quàm per verticem trianguli. quod demonſtrare oportebat.



THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXII.

RECTÆ lineæ, quæ ab eodem puncto conicam ſuperficiem contingunt ex utraque parte, omnes in unius trianguli lateribus tactiones faciunt.

SIT conus, cuius baſis quidem circulus circa centrum A; vertex B punctum; axis autem recta linea A B: & ſumpto aliquo puncto C extra conum, ab eo ducantur C D, C E rectæ lineæ, conicam ſuperficiem ex eadem parte contingentes. Dico puncta tactionum E, D in eadem recta linea eſſe. Ducatur à puncto C ad A B perpendicularis C F: & per C F ducatur planum æquidiſtans plano circuli A, quod ſectionem in cono faciat circulum circa centrũ F; ita ut conus conſtituatur, cuius baſis circulus F, & axis F B. rurſus per C F & axem aliud planum ducatur, faciens in cono triangulum B G H; & ipſi C F ad rectos angulos agatur C K, quæ in circuli F plano exiſtat: deinde per C K, & utranque ipſarum C D, C E ducantur plana conum ſecantia; quæ faciant in coni quidem ſuperficie lineas L D M, N E X; in plano autem trianguli B G H rectas lineas L C, N C. diametri igitur ſectionum L D M, N E X ſunt L M, N X rectæ lineæ. itaque ad diametros L M, N X ordinatim applicentur D O, E P: & ad alteram partem ſuperficiei in puncta R, S producantur. Quoniam igitur recta linea C D contingit lineam L D M in puncto D. & D O ordinatim applicata eſt. erit ut L C ad C M, ita L O ad O M. eadem quoque ratione, ut N C ad C X, ita erit N P ad P X. ergo ex proximè demonſtratis recta linea, quæ coniungit



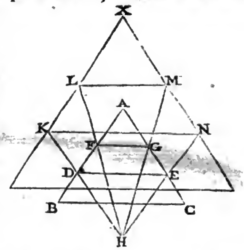
36. primi conicor.

git puncta O,P, ſi producatur; per verticem tranſibit. ducatur igitur O P B. & quoniam E S, D R ipſi C K ſunt æquidiſtantes: etiam inter ſe æquidiſtantes, & in uno plano erunt. itaque planum per lineas B P O, & E S, D R ductum ſectionem faciet in coni ſuperficie triangulum. ergo puncta E, D, quæ ſunt in ſuperficie coni; & in latere erunt trianguli, ſecantis triangulum B G H ſecundùm rectam lineam B P O. ſimiliter demonſtrabitur idem evenire in alijs, & in contingentibus ad puncta R, S. rectæ igitur lineæ, quæ à puncto C ductæ conicam ſuperficiem contingunt, omnes in unius trianguli lateribus tactiones faciunt. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXIII.

HOC demonſtrato, ſit triangulum A B C, cuius baſi B C æquidiſtantes ducantur D E, F G: & ſumpto aliquo puncto H, quod non ſit in trianguli plano, iungantur H D, H F, H G, H E; & productæ occurrant plano alicui, quod plano A B C æquidiſtet, in punctis K, L, M, N. planum igitur per lineas D E, K H ductum ſecabit etiam planum K L M N; & in eo communem ſectionem faciet rectam lineam K N, ipſi D E æquidiſtantem. Eodem modo & planum ductum per lineas F G, L H faciet rectam lineam L M æquidiſtante ipſi F G. Quoniam igitur planum K H L æquidiſtantibus planis A B C, K L M N ſecatur: communes ipſorum ſectiones K L, D F æquidiſtantes ſunt. & eadem ratione æquidiſtantes M N, G E. ergo productæ K L, N M convenient inter ſeſe. conveniant in X: & cùm duæ lineæ K X, X N duabus D A, A E æquidiſtent; angulus ad X angulo ad A æqualis erit. rurſus cùm duæ X K, K N æquidiſtent duabus A D, D E; erit angulus X K N angulo A D E æqualis. triangula igitur X K N, A B C inter ſeſe ſimilia erunt. Quòd ſi punctum H fingamus eſſe corpus illuminans, & triangulum A B C eius radijs oppoſitum, ſive per ſeſe, ſive in cono; continget radios, qui ab ipſo H emittuntur per triangulum A B C, facere triangulum umbræ X K N ipſi A B C ſimile. Et quanquam hæc ad Opticam contemplationem pertineant; & ob id à propoſita tractatione aliena videantur: tamen perſpicuè conſtat, ſine ijs, quæ hoc loco de coni & cylindri ſectione, hoc eſt de ellipſi & rectis lineis cum contingentibus demonſtrata ſunt, problema eiuſmodi abſolvi non poſſe. quare non temere, ſed neceſſariò de his ſermonem inſtituimus.

10. undecimi.



PRIMI LIBRI FINIS.

SE-

SERENI ANTINSENSIS
PHILOSOPHI LIBER SECUNDUS. DE SECTIONE CONI.

CUM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI URBINATIS.

SERENUS CYRO S. D.

CUM sectio conorum, optime Cyre, quæ per verticem efficitur, triangula quidem in conis constituat, variam autem & pulchram habeat contemplationem; & à nullo eorum, qui ante nos fuerunt, quòd sciam, pertractata sit: optimè me facturum existimavi, si locum hunc non inexplicatum relinquerem; perscriberéque de his, quæcunque mihi in mentem venerunt. Maiorem autem ferè partem eorum, quæ profundiore Geometria indigere videntur, arbitror me hoc libro complexum esse. neque enim mirum videri debet, si aliquid, quod scribi oporteret, prætermiserim; ut pote qui primus ad hanc contemplationem sim aggressus. Quamobrem par est, vel te, cùm in horum studium incubueris, vel posteriorum aliquem, qui in hæc inciderit, à me impulsum, ea, quæ prætermissa sunt, supplere: sunt tamen non nulla, quæ consultò præterierim, vel quòd manifesta essent, vel quòd ab alijs tractata. siquidem in omni cono sectionem triangulum esse, quando per verticem secetur, cùm ab alijs demonstratum sit, nos omisimus; ne aliena nostris inventis insererentur: quæ autem in promptu essent, & quæ unus-

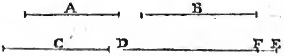
quis-

quiſque per ſe nullo negocio intelligere poſſet, non exiſtimavi me ſcribere oportere, ne legentium animos parum attentos facerem. Sed iam ad id, quod propoſitum eſt, accedamus.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI quatuor rectarum linearum prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam: rectangulum contentum prima & quarta maius eſt eo, quod ſecunda & tertia continetur.

HABEAT recta linea A ad lineam B maiorem proportionem, quàm C ad D E. Dico rectangulum ex A & D E rectangulo ex B & C maius eſſe. Quoniam enim A ad B maiorem proportionẽ habet, quàm C ad D E; ſit ut A ad B, ita C ad D F. rectangulum igitur ex A & D F æquale eſt rectangulo ex B & C. maius autem eſt, quod ſit ex A & D E, eo, quod ex A & D F. ergo rectangulum ex A & DE rectangulo ex B & C maius erit. A



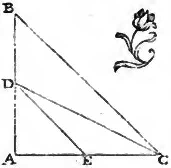
COMMENTARIVS.

MAIVS autem eſt, quod fit ex A & D E, eo, quod ex A & D F.) *Sequitur enim ex iam dictis, & octava quinti lineam D E maiorem eſſe, quàm D F. quippe cùm C ad D F maiorem proportionem, quàm ad D E, habere ponatur. Hoc idem demonſtravit Pappus, ut adnotavimus in trigeſimam quartam primi libri Conicorum Apollonij, & eodem in loco Eutocius.*

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

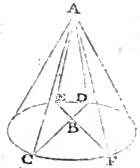
SI in triangulo orthogonio ab altero angulorum ad unum latus, quod eſt circa rectum angulum linea ducatur: habebit ducta linea ad eam, quæ inter ipſam & perpendicularem interijcitur, maiorem proportionem, quàm quæ à principio ſubtenditur recto angulo ad iam dictum latus.

SIT triangulum orthogonium A B C, rectum habens angulum ad A: & ab uno angulorum, videlicet à C ad A B linea C D ducatur. Dico C D ad D A maiorem proportionem habere, quàm C B ad B A. Ducatur enim linea D E ipſi B C æquidiſtans. Et quoniam rectus eſt angulus D A C: angulus D E C obtuſus erit. 32. primi
maior igitur eſt C D, quàm D E: & iccirco C D ad D A maiorem proportionem habet, quàm E D ad D A, 19.
hoc eſt quàm C B ad B A.



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

SI conus rectus planis per verticem ſecetur: eorum, quæ in ſectionibus fiunt triangulorum æquales habentia baſes, inter ſe æqualia erunt.



SIT conus rectus, cuius vertex A punctum, & basis circulus circa centrum B. Itaque hoc cono per verticem planis secto, fiant triangula ACD, AEF æquales bases habentia. triangula enim ex his sectionibus fieri alibi ostensum est. Dico triangula ACD, AEF æqualia esse. Nam cùm bases sint æquales; itemque æquales inter se AC, AD, AE, AF: & triangulum triangulo æquale erit.

A B (marginal letters)

COMMENTARIVS.

A TRIANGVLA enim ex his sectionibus fieri alibi ostensũ est.) *Ostendit hoc Apollonius in primo libro Conicorum propositione tertia.*

B Itemque æquales inter se AC, AD, AE, AF.) *Constat hoc ex generatione coni recti. uniuscuiusque enim earum quadratum æquale est quadrato axis coni unà cum quadrato semidiametri basis.*

THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

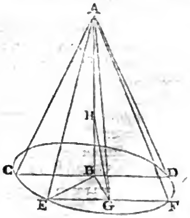
IN conis rectis similia triangula inter se æqualia sunt.

SIT enim in proposita figura ACD triangulum triangulo AEF simile. Dico & æquale esse. Quoniam enim ut AC ad CD, ita AE ad EF: erit permutando ut CA ad AE, ita CD ad EF. & sunt CA, AE æquales. ergo & æquales CD, EF. 3. huius. triangula verò æqualium basium, quæ in conis rectis fiunt, inter se sunt æqualia. ergo & ACD, AEF triangula æqualia erunt.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI conus rectus planis per verticem secetur, & per axem, & extra axem; sitque axis non minor semidiametro basis: eorum, quæ fiunt, triangulorum maximum est illud, quod per axem constituitur.

SIT conus, cuius vertex A, basis circulus circa B centrum, & axis AB. Itaque cono per verticem secto, fiant triangula per axem quidem ACD, extra axem verò AEF: ponaturque EF ipsi CD æquidistans; & axis videlicet AB non minor ipsa BC. Dico ACD triangulum triangulo AEF maius esse. Iungatur BE: & ab ipso B ad EF perpendicularis ducatur BG. ergo EF in 3. tertii. G bifariam dividetur; & iuncta AG perpendicularis erit ad EF. triangulum enim AEF æquicrure est. quoniam igitur AB non est minor semidiametro BE; & est EG minor BE: erit AB ipsa EG maior. itaque abscindatur BH æqualis EG. communis autem BG. ergo duæ HB, BG duabus EG, GB æquales sunt. & angulus EGB æqualis angulo GBH, quòd uterque rectus. basis igitur EB basi HG est æqualis. & triangulum triangulo simile. quare ut BE ad EG, ita GH ad HB. sed GH ad



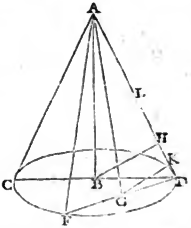
ad H B maiorẽ proportionem habet, quàm G A ad A B, ut proximè demonstravimus; orthogonium enim triangulum est A B G. ergo B E ad E G, hoc est C D ad E F maiorem proportionem habet, quàm G A ad A B. rectangulum igitur, quod fit ex C D, B A, maius est eo, quod ex E F, G A, per primum theorema. sed rectanguli quidem ex C D, B A dimidium est A C D triangulum: rectanguli verò ex E F, G A dimidium est triangulum A E F. quare triangulum A C D maius est triangulo A E F, & maius alijs omnibus, quæ bases habent æquales triangulo A E F, hoc est ipsi æqualibus. similiter demostrabitur &. in alijs sectionibus, quæ extra axem fiunt. triangulum igitur per axem omnium maximum erit.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

LICET idem & aliter universaliùs demonstrare, ex omnibus simpliciter triangulis, quod maiorem basim habet, illud maius esse.

SECTO nanque cono, fiant triangula A C D, A F D; ita ut bases C D, F D inter se ad terminũ D conveniant: & sit C D maior ipsa F D, sive per cẽtrũ trãseat, sive non. Dico triangulũ A C D maius esse triangulo A F D. Ducãtur enim ad F D, C D perpendiculares A B, A G; & ad A D ducatur B H perpendicularis. Itaque quoniã C D maior est ipsa F D: erit eius dimidia B D maior D G. ergo quadratum B D quadrato D G maius erit: & propterea reliquum quadratum B A minus quadrato A G. quadratum igitur A B ad quadratum B D minorem proportionem habet, quàm A G quadratum ad quadratum G D. sed ut quadratum A B ad quadratum B D, ita linea A H ad H D. ergo A H ad H D minorẽ habet proportionẽ, quàm quadratum A G ad quadratũ G D. fiat ut quadratum A G ad quadratum G D, ita A K ad K D; & iungatur G K, quæ ad A D perpendicularis erit, ut demonstrabitur. quoniam igitur ponimus A B non minorẽ ipsa B D: erit A B vel maior B D, vel ipsi æqualis. Sit primùm maior. ergo A H maior est H D. secetur A D bifariam in L. & quoniam rectangulum A H D minus est, quàm quadratum A L, quadrato L H; rectangulum verò A K D minus, quàm quadratum A L, quadrato L K. & maius est quadratum L K quadrato L H. erit rectangulum A H D, hoc est quadratum B H maius rectangulo A K D, hoc est quadrato G K. linea igitur B H maior est linea G K. suntque B H, G K altitudines triangulorum A B D, A G D. quare triangulum A B D maius est triangulo A G D; & eorum dupla, videlicet triangulum A C D maius triangulo A F D. sed triangulo A F D æquale est quodcunque basim habet ipsi F D æqualem. triangulum igitur A C D maius est quolibet triangulo, cuius basis est æqualis ipsi F D. Quòd si A B sit æqualis B D; erit & A H ipsi H D æqualis. & similiter rectangulum A H D, hoc est quadratum B H maius erit rectangulo A K D, hoc est quadrato K G: propterea que linea B H maior G K: & triangulum A B D triangulo A G D maius. Eodem modo demonstrabitur, etiam si alias bases duxerimus. quare triangulum, sic habens maiorem basim, triangulo minorem habente maius erit. At verò lineam G K ad A D perpendicularem esse hoc modo ostendetur.

A B
C
D
5. secũdi.



SIT triangulum orthogonium A G D; & à puncto G ad basim

ſim ducatur G K; ita ut quam proportionem habet quadratum A G ad quadratum G D, habeat linea A K ad K D. Dico G K ad A D perpendicularem eſſe.



SI enim non eſt ita; ſit G L perpendicularis. ut igitur quadratum A G ad quadratum G D, ita A L ad L D. erat autem ut A G quadratum ad quadratum G D, ita A K ad K D. quare ut A L ad L D, ita erit A K ad K D: quod eſt abſurdum. non igitur G L eſt perpendicularis. ſimiliter oſtendemus neque aliam ullam perpendicularem eſſe, præter ipſam G K. ergo G K ad A D perpendicularis erit.

COMMENTARIVS.

A ET propterea reliquum quadratum B A minus quadrato A G.] *Sunt enim ex penultima primi Elementorum duo quadrata A B, B D æqualia quadrato A D. & ſimiliter duo quadrata A G, G D æqualia eidem. quadrata igitur A B, B D quadratis A G, G D ſunt æqualia. quorum quidem quadratum B D maius eſt G D quadrato. ergo reliquum quadratum A B reliquo A G minus erit.*

B Quadratum igitur A B ad quadratum B D minorem proportionem habet, quàm A G quadratum ad quadratũ G D.) *Nam cùm quadratum A B minus ſit quadrato A G; habebit A B quadratum ad quadratum B D minorem proportionem, quàm quadratum A G ad idem B D quadratum. rurſus cùm G D ſit minor ipſa B D; erit & quadratum G D minus quadrato B D, ergo quadratum A G ad quadratum B D minorem proportionem habet, quàm ad G D quadratum. quadratum igitur A B ad quadratum B D multò minorem proportionem habebit, quàm A G quadratum ad quadratum G D.*

C Sed ut quadratum A B ad quadratum B D, ita linea A H ad H D.) *Cùm enim triangulum A B D rectangulum ſit, & B H ad baſim perpendicularis; erit ex corollario octauæ ſexti A B proportionalis media inter D A, A H: itemque B D proportionalis inter A D, D H. ut igitur H A ad A B, ita A B ad A D. quare ut quadratum A B ad quadratum A D, ita linea H A ad A D. & eodem modo oſtendetur, ut quadratum B D ad quadratum D A, ita H D ad D A: conuertendoque ut quadratum D A ad quadratum B D, ita D A ad H D. ergo ex æquali ut quadratum A B ad quadratum B D, ita A H ad H D.* [cor. 20. ſexti.]

D Ergo A H maior eſt H D.) *Etenim demonſtratum eſt A H ad H D eſſe, ut quadratum A B ad quadratum B D. ſed cùm A B ſit maior B D, & quadratum A B quadrato B D maius erit. ideoque A H maior ipſa H D.*

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

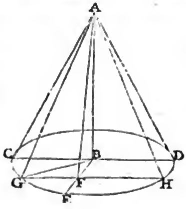
SI in cono recto triangulum per axem maximum ſit triangulorum omnium, quæ extra axem conſtituuntur: axis coni non minor erit ſemidiametro baſis.

SIT conus, cuius vertex quidem A punctum, axis A B recta linea, baſis autem circulus circa centrum B: & triangulum per axem A C D, quod maximum ſit omnium triangulorum, quæ extra axem in cono conſtituuntur. Dico lineam A B ſemidiametro baſis non minorem eſſe. Si enim fieri poteſt; ſit minor: & ducatur in circulo linea B E ad C D perpendicularis. Quoniam igitur angulus A B E rectus

ctus est: linea, quæ puncta A, E coniungit, maior est semidiametro BE. quare si à puncto A in angulo ABE aptetur recta linea, ipsi semidiametro æqualis; inter puncta B & E cadet. itaque aptetur, & sit AF: perque F ducatur GH ipsi CD æquidistans: & AG iungatur. fient triangula ABF, GBF similia, ut in quinto theoremate est demonstratum, & latera eiusdem rationis inter se æqualia erunt. ut igitur FA ad AB, ita BG ad GF, hoc est CB ad GF. quare rectangulum ABC æquale est rectangulo AFG, hoc est triangulum per axem æquale triangulo AGH; quod fieri non potest. posuimus enim triangulum ACD maximum esse. non igitur AB minor est semidiametro basis.

A

16. sexti.



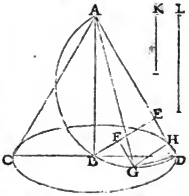
COMMENTARIUS.

FIENT triangula ABF, GBF similia, ut in quinto theoremate est demonstratum.) *In quinto theoremate similitudo triangulorum demonstratur ex sexta sexti Elementorum, in hoc verò ex septima eiusdem demonstrabitur. Quoniam enim duo triangula AFB, GBF unum angulum ABF uni angulo GFB æqualem habent; est enim uterque rectus. & circa alios angulos AFB, GBF latera proportionalia, immo verò æqualia; cùm ponatur AF æqualis semidiametro basis, hoc est ipsi GB; & sit BF utrique communis: reliquorum autem angulorum BAF, BGF uterque minor recto. triangula AFB, GBF inter se similia, & æqualia erunt.* A

PROBLEMA I. PROPOSITIO VIII.

CONUM rectum, cuius axis non sit minor semidiametro basis, plano per verticem ducto ita secare, ut faciat triangulum, quod ad triangulum per axem proportionem habeat datam. oportet autem datam proportionem esse minoris ad maius.

SIT coni vertex A, basis circulus circa B centrum, & triangulum per axem ACD; in quo AB est perpendicularis: & oporteat conum secare triangulo, quod ad triangulum ACD proportionem datam habeat. sit autem data proportio, quæ est K minoris ad L maiorem. Quoniam igitur triangulum ABD rectangulum est: describatur circa ipsum semicirculus; atque à puncto B ducatur BE perpendicularis; & quam proportionem habet K ad L, eandem habeat FE ad EB: deinde per F ducatur FG ipsi ED æquidistans, & per G ipsa GH æquidistans FE. erit FE æqualis ipsi GH. Itaque quoniam ut K ad L, ita FE ad EB, hoc est GH ad BE. ut autem GH ad BE, ita rectangulum ex GH & AD ad rectangulum ex BE & AD: & ut rectangulum ex GH & AD ad rectangulum ex BE & AD, ita eorum dimidia, videlicet triangulum AGD ad triangulum ABD. erit ut K ad L, ita AGD triangulum ad triangulum ABD. quare triangulum AGD ad ipsum ABD est in data proportione. Si igitur in basi coni aptabimus lineam duplam lineæ GD, perque ipsam & verticem planum ducemus; faciet id in cono triangulum ipsius AGD du-

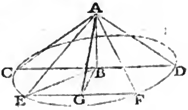


duplum: quod quidem ad triangulum A C D eandem proportionem habebit, quam A G D triangulum ad triangulum A B D, hoc est quam K habet ad L.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

SI conus rectus planis per verticem secetur, & per axem, & extra axem; triangulorum autem, quæ fiunt extra axem, unum aliquod æquale sit triangulo per axem: axis coni semidiametro basis minor erit.

SECTO enim cono, fiant triangula, per axem quidem A C D, extra axem verò A E F, quod triangulo A C D sit æquale: sitque E F ipsi C D æquidistans; & A B, A G perpendiculares; & iungantur B E, B G. Dico axem A B semidiametro B D minorem esse. Quoniam enim A E F triangulum æquale est triangulo A C D; & eorum dupla æqualia erunt; videlicet rectangulum ex E F & G A æquale



14. sexti. rectangulo ex C D & B A. ergo ut C D ad E F, hoc est C B ad E G, hoc est B E ad E G, ita G A ad A B. quòd cùm duo triangula B E G, G A B unum angulum E G B uni angulo A B G æqualem habeant (est enim uterque rectus) circa alios autem angulos latera proportionalia; sitque reliquorum E B G, A G B uterque recto minor: trian-

7. sexti. gula inter se similia erunt. ut igitur E G ad G B, ita A B ad B G. quare A B ipsi E

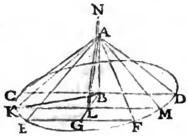
9. quinti. G est æqualis. sed E G minor est semidiametro B E. ergo A B coni axis semidiametro B E minor erit. quod demonstrandum proponebatur.

QUONIAM autem demonstratum est in lineis æquidistantibus C D, E F; constat idem sequi, etiam si non sint æquidistan-

3. huius. tes, quippe cùm ostensum sit triangula bases æquales habentia inter se æqualia esse.

THEOREMA IX. PROPOSITIO X.

IISDEM manentibus, demonstrandum est, si rursus planum ducatur per verticem conum secans, faciensque in basi rectam lineam, cuius magnitudo inter bases æqualium triangulorum contineatur; triangulum illud utrisque triangulis æqualibus maius esse.



SIT ut in antecedenti figura triangulum per axem A C D æquale triangulo basim habenti E F; & ducatur quælibet recta linea K M, cuius magnitudo sit inter C D, E F: ponatur autem utrique earum æquidistans; & per ipsam & verticem planum ducatur. Dico triangulum A K M utroque ipsorum A C D, A E F maius esse. Secetur enim rursus K M bifariam in L, & iungantur A L, B K, B L. Itaque quoniam A C D triangulum æquale est triangulo A E F:

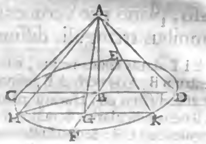
A E F: erit A B ipsi E G, hoc est dimidiæ E F æqualis, ut proximè demonstratum fuit. sed K L est maior E G. ergo & K L ipsa A B maior erit. ponatur B N æqualis K L, & L N iungatur. eadem ratione, qua supra, demonstrabimus triangulum B K L æquale & simile triangulo L N B. quare ut B K ad K L, hoc est ut C B ad K L, hoc est C D ad K M, ita L N ad N B. sed L N ad N B minorem proportionem habet, quàm L A ad A B. ergo & C D ad K M minorem habet proportionem, quàm L A ad A B: & propterea rectangulum ex C D & B A minus est rectangulo ex K M & L A, hoc est triangulum A C D minus triangulo A K M. triangulum igitur A K M triangulo A C D, & triangulo A E F maius erit. 1. huius

IDEM demonstrabitur etiam in omnibus triangulis, quorum basis magnitudine inter C D, E F continetur. nihil enim differt, si bases non sint æquidistantes, ut supra demonstratum fuit.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XI.

DATUM conum rectum, cuius axis sit minor semidiametro basis, plano per verticem ita secare, ut faciat triangulum æquale ei, quod per axem constituitur.

SIT datus conus rectus, cuius axis quidem A B; triangulum verò per axem A C D: & oporteat eum plano per verticem ita secare, ut faciat triangulum triangulo A C D æquale. Ducatur in circulo per centrum linea E B F ad rectos angulos ipsi C D. & quoniam A B minor est semidiametro basis: aptetur A G subtendens angulum A B F, quæ semidiametro sit æqualis; quod quidem facilè effici potest: deinde per G ducatur H G K ipsi C D æquidistans. ergo H G K ad G bifariã secatur; & ad E B F est perpendicularis. ducatur per lineas H K, G A planum, quod triangulum A H K efficiat. Dico A H K triangulo A C D æquale esse. Iungatur enim B H. Et quoniam A G est æqualis B H: erit ut A G ad G B, ita H B ad B G. quòd cùm duo triangula B H G, G A B unum angulum uni angulo æqualem habeant (sunt enim H G B, A B G utrique recti) & circa alios angulos latera proportionalia; reliquorum verò uterque recto minor: erunt B H G, G A B triangula inter se similia. quare ut B H ad H G, hoc est C D ad H K, ita G A ad A B: iccircoque rectangulum, quod fit ex C D, & B A æquale est rectangulo ex H K & G A: & eorum dimidia, videlicet triangulum A C D æquale triangulo A H K. quod facere oportebat.

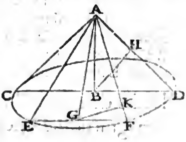


THEOREMA X. PROPOSITIO XII.

SI conus rectus planis per verticem secetur: & in uno eorum triangulorum, quæ fiunt, linea à vertice ad basim perpendicularis ducta æqualis sit dimidiæ basis: erit illud triangulum maius omnibus triangulis dissimilibus, quæ in cono constituuntur.

SIT in cono recto triangulum A C D, quod perpendicularem A B æqualem habeat

beat ipsi B D dimidiæ C D basis. Dico A C D triangulum maius esse omnibus triangulis dissimilibus, quæ in cono constituuntur. Sumatur enim aliud quodvis triangulum A E F ipsi dissimile, in quo sit perpendicularis A G: & à puncto quidem B ad A D perpendicularis ducatur B H; à puncto autem G ad A F itidem ducatur perpendicularis G K. Quoniam igitur triangulum A C D dissimile est triangulo A E F: & A B D ipsi A G F dissimile erit. sunt autem orthogonia, & æquicrure est A B D. ergo A G F non est æquicrure: & quadratum quidem A B æquale est quadrato B D; quadratum verò A G quadrato G F est inæquale. sed ut A B quadratum ad quadratum B D, ita linea A H ad H D: & ut quadratum A G ad quadratum G F, ita A K ad K F. linea igitur A D in partes æquales dividitur; & A F in partes inæquales. itaque quoniam id, quod æqualibus partibus continetur, maius est contento partibus inæqualibus: erit A H D rectangulum maius rectangulo A K F. sed rectangulo A H D æquale est B H quadratum: & rectangulo A K F æquale quadratum G K. quadratum igitur B H quadrato G K maius erit: ideircoque linea B H maior, quàm G K. & ut B H ad G K, ita rectangulum ex B H & A D ad rectangulum ex G K & A F; & dimidium ad dimidium, hoc est triangulum A B D ad triangulum A G F. maius igitur est A B D triangulum triangulo A G F; & eorum dupla, videlicet triangulum A C D maius triangulo A E F. similiter ostendetur maius esse omnibus triangulis dissimilibus ipsi A C D. quod demonstrare oportebat.

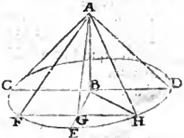


PROBLEMA III. PROPOSITIO XIII.

DATUM conum rectum, cuius axis sit minor semidiametro basis, plano per verticem ita secare, ut faciat triangulum maius omnibus triangulis dissimilibus, quæ in cono constituuntur.

SIT datus conus rectus, cuius vertex quidem A punctum, basis circulus circa centrum B; axis verò A B, minor semidiametro basis: & oporteat conum ita secare, ut ante dictum est. Ducatur planum per axem, quod faciat triangulum A C D: erit A B perpendicularis, & minor B D. deinde in plano circuli ducatur B E ad rectos angulos ipsi C B: & quo D B quadratum superat quadratum B A, eius dimidium sit quadratum B G: perque G ducatur F G H, æquidistans C D: & iungantur A G, B H. Itaque quadratum B D, hoc est B H superat quadratum B A duobus quadratis B G. quadratum autem A G superat quadratum A B, uno quadrato B G. ergo quadratum B H superat quadratum A G, ipso B G quadrato. sed quadratum B H superat G H quadratum, quadrato B G. quadratum igitur B H utrunque quadratum A G, G H, eodem quadrato superabit: & propterea quadratum A G æquale est quadrato G H, & linea A G lineæ G H æqualis. est autem & F G æqualis G H. quare A G æqualis est dimidiæ ipsius F H. si igitur per F H, G A planum ducatur; fiet in cono triangulum, quod sit A F H. Itaque quoniam triangulum est in cono A F H, à cuius vertice perpendicularis ducta A G æqualis est dimidiæ basis: erit A F H triangulum maius omnibus triangulis dissimilibus, quæ in ipso cono constituuntur. quod facere oportebat.

A (margin note, beside "perat quadratum A B, uno quadrato B G. ergo quadratum B H")



COMMENTARIVS.

A ERGO quadratum B H superat quadratum A G, ipso B G quadrato.) *Quoniam*

enim

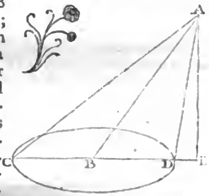
enim quadratum B H superat quadratum B A, duobus quadratis B G; & quadratum A G superat quadratum B A, quadrato B G: erit quadratum B H æquale quadrato B A unà cum duobus quadratis B G; & quadratum A G æquale quadrato B A unà cum quadrato B G. sed B A quadratum unà cum duobus quadratis B G superat quadratum B A unà cum quadrato B G, ipso quadrato B G. ergo & quadratum B H superabit quadratum A G, eodem B G quadrato.

PROBLEMA IV. PROPOSITIO XIV.

DATUM conum plano per axem ad rectos angulos ipsi basi secare.

SIT datus conus, cuius vertex A punctum, basis circulus circa centrum B, axis verò A B: & oporteat conum secare per lineam A B ad rectos angulos ipsi basi. Si igitur conus sit rectus; perspicuum est lineam A B ad basim perpendicularem esse: & ob id omnia, quæ per ipsam transeunt, plana ad rectos angulos erunt. quare & triangulũ A C D per lineam A B ductum ad rectos angulos erit ipsi basi. Sed sit conus scalenus. ergo A B non est ad basim perpendicularis. cadat à vertice A perpendicularis ad basis planum in puncto E: & iuncta E B, producatur trianguli A B E planum, quod in cono sectionem faciat triangulum A C D. Dico A C D triangulum ad rectos angulos esse basi coni. Quoniam enim A E perpendicularis est ad basis planum: & omnia, quæ per ipsam A E transeunt, plana eidem ad rectos angulos erunt. ergo & triangulum A C D ad rectos angulos erit plano basis. id quod fecisse oportebat.

18. undecimi.



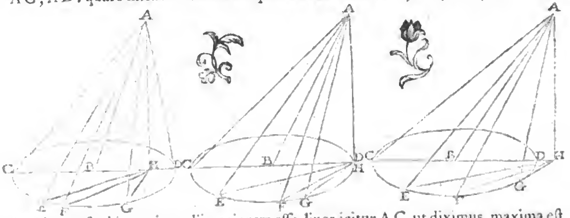
THEOREMA XI. PROPOSITIO XV.

SI conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi; triangulum in cono factum scalenum erit, cuius maius latus maxima erit linearum omnium, quæ à vertice coni ad basis circunferentiam ducuntur: & minus latus linearum omnium similiter ductarum minima erit; aliarum verò, quæ maximæ propinquior est, maior erit, quàm quæ ab ipsa magis distat.

SIT conus scalenus, cuius vertex A punctum, basis circulus C E D, & axis A B: cono autem secto per axem ad rectos angulos ipsi C E D circulo, fiat triangulum A C D; & axis ad partes D vergat. Cùm igitur conus scalenus sit; non est A B perpendicularis ad circulum C E D. ducatur A H ad ipsum perpendicularis, quæ erit in plano trianguli A C D; & in lineam C B D productam cadet. Itaque quoniam maior est C H, quàm H D: & quadratum C H quadrato H D erit maius. commune apponatur quadratum H A. quadrata igitur C H, H A maiora sunt quadratis D H, H A, hoc est quadratum C A maius quadrato A D. ergo linea A C maior ipsa A D. Dico A C maximam esse linearum omnium, quæ à vertice ad basis circunferentiam pertinent: & A D minimã. Ducantur enim H E, H F, H G. Et quoniam H C maxima est omnium, quæ à puncto H in circunferentiam cadunt: erit quadratum H C maximum quadrato-

 rum

rum H E, H F, H G, H D. commune apponatur quadratum H A. ergo quadrata, quæ fiunt à lineis C H, H A, maiora sunt eis, quæ fiunt ab E H, H A; F H, H A; G H, H A; D H, H A; hoc est quadratum C A maius est quolibet quadratorum A E, A F, A G, A D. quare linea A C maior est qualibet linearum A E, A F, A G, A D. simi-

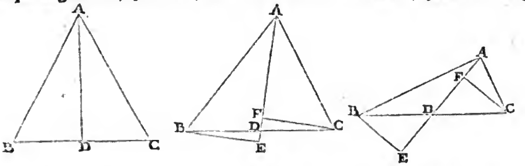


liter demonstrabitur etiam alijs maiorem esse. linea igitur A C, ut diximus, maxima est omnium linearum, quæ in ipso cono ducuntur. Eadem ratione demonstrabitur lineam A D minimã esse: aliarum verò A E maior est, quàm A F; & A F maior, quàm A G; & semper propinquior ipsi A C maior, quàm quæ ab ea magis distat. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XVI.

SI in triangulo à vertice ad punctum, quod basim bifariam dividit, recta linea ducatur: quadrata ex lateribus facta æqualia erunt quadratis, quæ fiunt ex basis partibus, & duplo quadrati eius lineæ, quæ à vertice ad basim ducta fuerit.

SIT triangulum A B C, cuius basis secetur bifariam in D; & ducatur A D. Dico quadrata B A, A C quadratis B D, D C, & duplo quadrati A D æqualia esse. Si enim æquicrure sit A B C triangulum; demonstratio manifesta erit: propterea quòd uterque angulorum, qui ad D, est rectus. Sed sit B A maior, quàm A C. ergo



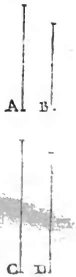
B D A angulus maior est angulo A D C. producatur A D, & ad ipsam perpendiculares ducantur B E, C F. Similia igitur sunt triangula orthogonia E B D, C F D, propter linearum B E, F C æquidistantiam. quare ut B D ad D C, ita E D ad D F.
1. sexti. æqualis autem est B D ipsi D C. ergo & E D æqualis D F. & rectangulum A D E rectangulo A D F æquale; & duplum rectanguli A D E duplo rectanguli A D F. itaque
12. secũdi. quoniam quadratum A B maius est quadratis A D, D B, duplo rectanguli A D E,
13. secũdi. hoc est duplo rectanguli A D F; quadratum verò A C minus est quadratis A D, D C, duplo rectanguli A D F: erunt quadrata B A, A C æqualia quadratis B D, D C & duplo quadrati A D. quod demonstrare oportebat.

THE-

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XVII.

SI quatuor linearum prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam: & quadratum primæ ad quadratum secundæ maiorem habebit proportionem, quàm tertiæ quadratum ad quadratum quartæ. Quòd si quadratum primæ ad quadratum secundæ maiorem proportionem habeat, quàm tertiæ quadratum ad quadratũ quartæ: & prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

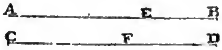
SINT quatuor rectæ lineæ A,B,C,D: & habeat A ad B maiorẽ proportionem, quàm C ad D. Dico quadratum ipsius A ad quadratum B maiorẽ habere proportionem, quàm quadratum C ad D quadratum. Quoniam enim proportio A ad B maior est, quàm C ad D: erit dupla maioris proportionis maior, quàm dupla minoris. est autem proportionis maioris A ad B dupla proportio quadrati A ad quadratum B: & proportionis C ad D minoris dupla proportio quadrati C ad quadratum D. ergo proportio quadrati A ad quadratum B maior est proportione quadrati C ad quadratum D. Rursus quadratum A ad quadratum B maiorem proportionem habeat, quàm quadratum C ad quadratum D. Dico A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D. Nam cùm proportio quadrati A ad quadratum B maior sit, quàm quadrati C ad quadratum D; erit maioris proportionis dimidia maior, quàm dimidia minoris. sed proportionis quidem quadrati A ad quadratum B maioris dimidia est proportio A ad B; proportionis verò minoris quadrati C ad quadratum D dimidia est C ad D proportio. proportio igitur A ad B maior est, quàm C ad D, quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XIV. PROPOSITIO XVIII.

SI duæ magnitudines æquales inæqualiter dividantur; & alterius partium maior ad minorem proportionem maiorem habeat, quàm partium alterius maior ad minorem, vel æqualis ad æqualem: prædictarum partium maior omnium maxima, minor verò omnium minima erit.

SINT duæ magnitudines æquales A B, C D; dividaturque A B in E, & C D in F: & sit A E maior, quàm E B; & C F non minor, quàm F D; ita ut A E ad E B maiorem proportionem habeat, quàm C F ad F D. Dico magnitudinum A E, E B, C F, F D maximam quidem esse A E, E B verò minimam. Quoniam enim A E ad E B maiorem proportionem habet, quàm C F ad F D: & componendo A B ad B E maiorem habebit, quàm C D ad D F: permutandoque A B ad C D maiorem, quàm E B ad F D. est autem A B ipsi C D æqualis. minor igitur E B, quàm F D. estque D F non maior, quàm F C. quare & E B quàm C F minor. sed & erat minor, quàm A E. ergo E B minima erit. rursus



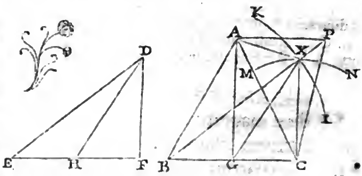
 quo-

quoniam A B est æqualis C D, quarũ E B minor est quàm D F; erit reliqua A E maior, quàm reliqua C F. & C F non est minor, quàm F D. quare & A E maior, quàm F D. erat autem & maior, quàm E B. ergo A E omnium maxima erit, & E B minima.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XIX.

SI duo triangula & bases æquales habeant, & lineas, quæ à vertice ad punctum, quod basim bifariam secat, ducuntur; alterius autem maius latus ad minus maiorem proportionẽ habeat, quàm reliqui maius latus ad minus, vel æquale ad æquale: triangulum illud, cuius maius latus ad minus maiorem habet proportionem, altero minus erit.

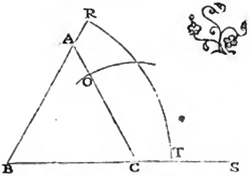
SINT duo triangula A B C, D E F; bases B C, E F æquales habentia: quarum utraque bifariam secetur in punctis G, H: ductæque A G, D H inter se æquales sint: & sit E D maior, quàm D F; B A verò non minor, quàm A C; ita ut E D ad D F maiorem proportionem habeat, quàm B A ad A C. Dico D E F triangulum minus esse triangulo A B C. Quoniam enim B C, E F & æquales sunt, & in partes æquales dividuntur; suntque æquales A G, D H: erunt & quæ ex ipsis efficiuntur quadrata æqualia. quadrata igitur B G, G C unà cum duplo quadrati A G æqualia sunt quadratis E H, H F unà cum duplo quadrati D H. sed quadratis B G, G C unà cum
16. huius. duplo quadrati A G æqualia sunt quadrata B A, A C, ut ostensum est: & quadratis E H, H F unà cum duplo quadrati D H æqualia quadrata E D, D F. utraque igitur quadrata B A, A C utrisque E D, D F æqualia
17. huius. erunt. & quoniam E D ad D F maiorem proportionẽ habet, quàm B A ad A C: habebit quadratum E D ad quadratum D F maiorem proportionem, quàm quadratum B A ad quadratum A C. quòd cùm duarum magnitudinum æqualium, videlicet eius, quæ constat ex quadratis B A, A C; & eius quæ ex quadratis E D, D F, maior pars ad minorem, videlicet quadratum E D ad quadratum D F maiorem proportionem habeat, quàm reliqua pars ad reliquum, videlicet quàm quadratum B A ad A C quadratum: erit quadratum E D, quod est maximum, utroque quadrato B A, A C maius; quadratum verò D F minimum, utroque B A, A C minus, ex antecedenti theoremate. quare linea E D maior est utraque ipsarum B A, A C; & D F utraque minor. circulus igitur, qui ex centro B, & intervallo ipsi E D æquali describitur, videlicet K L transibit ultra lineam B A; & circulus ex centro C, intervalloque æquali ipsi D F descriptus, hoc est M N secabit lineam A C: qui quidem duo circuli K L, M N sese invicem secabunt, ut demonstrabitur. secent autem sese in puncto X: & iungantur X A, X B, X G, X C. est igitur B X ipsi E D æqualis, & X C æqualis D F. eratque B C æqualis E F. quare totum triangulum B X C triangulo E D F est æquale: ac propterea X G æqualis D H, hoc est ipsi A G. ex quibus sequitur angulum X A G acutum esse. & quoniam B A non est minor A C: angulus A G



B an-

B angulo A G C non erit minor. angulus igitur A G C non est maior recto. erat autem X A G angulus recto minor. ergo anguli C G A, X A G duobus rectis minores sunt: & linea A X ipsi G C non est æquidistans. ducatur per A ipsi B C æquidistans A P; & B X P protrahatur: iungaturque C P. triangulum igitur A B C triangulo P B C est æquale: & iccirco B A C maius est ipso B X C, hoc est E D F. quod oportebat demonstrare. 38. primi.

CIRCULOS autem K L, M N sese invicem secare hoc modo demonstrabitur.



SIT enim ipsi E D æqualis B A R: & ipsi D F æqualis C S, quæ sit in eadem recta linea B C. tota igitur B S æqualis est utrique E F, F D. & quoniam utraque E F, F D maior est E D: erit & B S ipsa E D maior. Itaque circulus ex centro B & intervallo B R descriptus ipsam B S secabit. & cùm C S, quæ est æqualis D F, minor sit C A; circulus ex centro C, intervalloque C S descriptus secabit A C. secet in O. ergo trãsibit per circunferentiam R T. circuli igitur K L, M N sese invicem secabunt.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XX.

SI duo triangula inæqualium laterum & bases æquales habeant, & lineas, quæ à vertice ad punctum basim bifariam secans ducuntur: minoris trianguli maius latus ad minus maiorem proportionem habebit, quàm maioris maius latus ad minus.

SINT triangula A B C, E F G, bases A C, E G æquales habentia; quæ bifariam secentur in punctis D, H; & sint æquales B D, F H: sit autem maius triangulum E F G; & A B maior, quàm B C; itemque E F, quàm F G maior. Dico A B ad B C maiorem habere proportionem, quàm E F ad F G. Si enim non ita sit, vel eandem proportionem habebit, vel minorem. Sit primùm, si fieri potest, ut A B ad B C, ita E F ad F G. ergo ut A B quadratum ad quadratum B C, ita quadratum E F ad quadratum F G: & componendo, permutandoque ut utraque quadrata A B, B C ad utraque E F, F G, ita quadratum B C ad quadratum F G. sed utraque quadrata A B, B C utrisque E F, F G sunt æqualia. ergo & quadratum B C æquale est quadrato F G: & iccirco reliquum A B quadratum reliquo E F æquale erit. linea igitur A B æqualis est E F; & B C ipsi F G. sed & bases sunt æquales. ergo triangulum A B C æquale est triangulo E F G, quod est absurdum; erat enim triangulum A B C minus. non igitur A B ad B C proportionem habet eandem, quam E F ad F G. Sed rursus, si fieri potest, A B ad B C minorem proportionem habeat, quàm E F ad F G. habebit E F ad F G maiorem proportionem, quàm A B 16. huius.

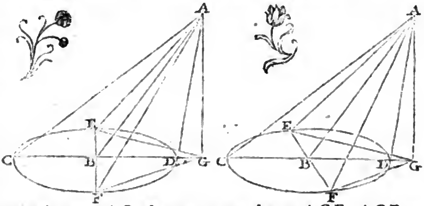


A B ad B C. quare triangulũ E F G minus erit triangulo A B C, ex proximè demonſtratis; quod eſt abſurdum: ponebatur enim maius. non ergo A B ad B C minorem proportionem habet, quàm E F ad F G. demonſtratum autem eſt neque eandem habere. relinquitur igitur ut A B ad B C maiorem habeat proportionem, quàm E F ad F G.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXI.

DATUM conum ſcalenum plano per verticem ita ſecare, ut in cono triangulum æquicrure efficiat.

SIT datus conus ſcalenus, cuius axis A B, & baſis C E D circulus: oporteatque eum ita ſecare, uti dictum eſt. Secetur primò per axem plano A C D ad rectos angulos ipſi circulo C E D; & ducatur perpendicularis A G, quæ cadet in lineam C D, trianguli A C D baſim: ipſi verò C D ad rectos angulos agatur E F in circuli plano; perque E F, & per verticem A planũ ducatur, quod faciat triangulum A E F. Dico A E F triangulum æquicrure eſſe. Iũgantur enim E G, F G. Et quoniam C D, ipſam E F ſecans ad rectos angulos, biſariam ſecat: erit



E G æqualis G F. communis autem A G; & uterque angulorum A G E, A G F rectus. ergo E A eſt æqualis A F: & iccirco triangulum A E F eſt æquicrure.

EX quibus conſtat omnia triangula, quæ baſes habent ad rectos angulos ipſi C D, æquicruria eſſe. Demonſtrandum etiam eſt ea triangula, quæ baſes habent non ad rectos angulos ipſi C D, non eſſe æquicruria.

PONATVR enim E F in eadem figura non eſſe ad rectos angulos ipſi C D: erunt E G, F G inæquales. communis autem A G, & ad ipſas perpendicularis. ergo E A, A F inæquales ſunt; & triangulum E A F non eſt æquicrure.

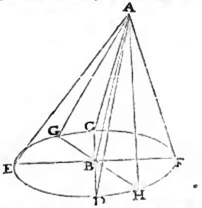
THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXII.

TRIANGULORUM, quæ in cono ſcaleno per axem conſtituuntur, maximum eſt æquicrure; & minimum, quod eſt ad rectos angulos baſi coni: reliquorum verò maximo propinquius maius eſt eo, quod plus diſtat.

IN cono enim ſcaleno triangula per axem A B conſtituantur: æquicrure quidem A C D; rectum verò ad baſis planum A E F. Dico triangulorum omnium, quæ per axem conſtituuntur, A C D maximum eſſe, & A E F minimum. Sit enim aliud triangulum

per

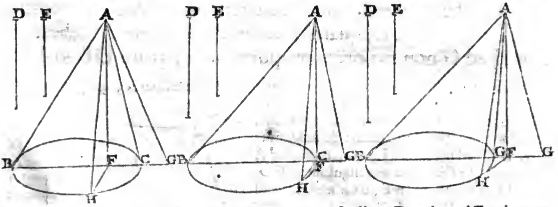
per axem A G H. Et quoniam conus ſcalenus eſt: vergat axis A B ad partes F. ergo linea A E maxima eſt omnium, quæ à punƈto A ad baſis circunferentiam ducuntur; & A F minima. quare E A maior eſt, quàm A G; & F A minor, quàm A H. itaque cùm duo triangula A E F, A G H baſes E F, G H æquales habeant; & lineam A B eandem, quæ à vertice ad punƈtum baſim biſariam ſecans ducitur; habeatque E A ad A F maiorem proportionem, quàm G A ad A H: erit A E F triangulum minus triangulo A G H. ſimiliter etiam demonſtrabitur minus omnibus alijs triangulis per axem. ergo A E F minimum eſt omnium triangulorum, quæ per axem conſtituuntur. Rurſus in triangulis A G H, A C D & baſes æquales ſunt, & eadem, quæ ducitur à vertice ad punƈtum baſim biſariam ſecans: habetque G A ad A H maiorem proportionem, quàm C A ad A D; ſunt enim C A, A D æquales. ergo G A H triangulum minus eſt triangulo C A D. ſimiliter demonſtrabitur, omnia triangula per axem duƈta triangulo C A D minora eſſe. triangulum igitur A C D maximum eſt omnium triangulorum, quæ per axem conſtituuntur; & E F minimum. quod demonſtrare oportebat. Eodem modo demonſtrabitur propinquius maximo maius eſſe eo, quod plus diſtat.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXIII.

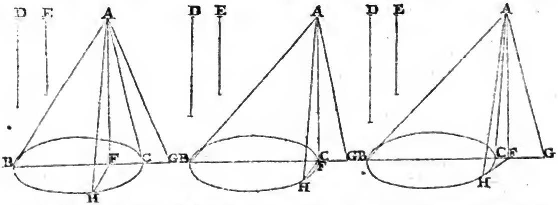
IN dato cono ſcaleno à vertice ad circunferentiam baſis lineam ducere, ad quam maxima proportionem datam habeat. oportet autem datam proportionem eſſe maioris ad minus: & minorem eſſe ea, quam habet maxima linearum, quæ in cono ducuntur, ad minimam.

SIT conus datus baſim habens B C circulum, cuius diameter B C, verticem verò punƈtum A; & triangulum per axem A B C ad reƈtos angulos ipſi B C circulo. ergo B A linearum, quæ à vertice coni ducuntur maxima eſt; & A C minima. Itaque oporteat à punƈto A ad circunferentiam circuli ducere lineam, ad quam ipſa



B A proportionem habeat eandem, quam habet reƈta linea D maior ad E minorem. habeat autem D ad E minorem proportionem, quam B A ad A C. Ducatur à punƈto A ad B C perpendicularis A F; protrahaturque B F G: & ut D ad E ita ſit B A ad aliam quampiam A G, quæ coaptetur ſub angulo A G F. ergo B A ad A G minorem pro-

proportionem habet, quàm B A ad A C: & propterea G A maior est, quàm A C; & G F maior, quàm F C. Quoniam igitur ut quadratum D ad quadratum E, ita quadratum B A ad quadratum A G: erit quadratum B A quadrato A G maius; hoc est quadrata B F, F A maiora quadratis A F, F G. commune auferatur quadratum A F. ergo reliquum B F quadratum maius est quadrato F G: & ideo linea B F ipsa F G maior. erat autem C F minor, quàm F G. quare G F maior est, quàm F C, & minor quàm F B. Coaptetur igitur in circulo linea F H ipsi F G æqualis: & iungatur A H.

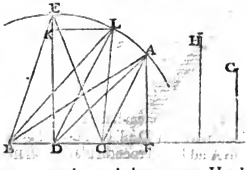


Itaque quoniam H F ipsi FG est æqualis; communis autem F A & utrique ipsarum ad rectos angulos: erit basis H A æqualis basi A G. sed ut D ad E, ita est B A ad A G, hoc est B A ad A H. estque D ad E in data proportione. ergo & B A ad A H in data proportione erit. ducta igitur est A H, ad quam ipsa B A proportionem habet datam. quod facere oportebat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXIV.

SIT datum triangulum scalenum A B C, cuius latus B A maius sit latere A C; & basis B C bifariam in D secetur, ducaturque A D: sit autem E D perpendicularis ad B C, & æqualis ipsi D A; & sit A F ad eandem B C perpendicularis; oporteatque aliud triangulum constituere maius triangulo A B C, quod habeat lineam, ductam à vertice ad punctum basim bifariam secans, utrique ipsarum D E, D A æqualem; & ad triangulum A B C proportionem eandem habeat, quàm H maior ad G minorem. habeat autem H ad G non maiorem proportionem, quàm D E ab A F.

ITAQUE centro D, & intervallo D A circulus E A describatur, qui per E transibit. & quoniam proportio H ad G non maior est proportione D E ad A F: erit vel eadem, vel minor. Sit primùm eadem: & iungantur E B, E C. est igitur ut H ad G, ita E D ad A F. & ut E D ad A F, ita rectangulum ex E D, B C ad rectangulū ex A F, B C. ergo ut H ad G, ita rectangulum ex E D, B C ad rectangulum ex A F, B C. sed rectanguli ex E D, B C dimidium est E B C triangulum: & rectanguli ex A F, B C dimidium est triangulum A B C.



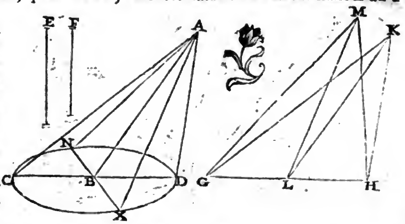
triangulum igitur B E C ad triangulum B A C eam proportionem habet, quam H ad G, hoc

G, hoc est datam. Habeat deinde H ad G minorem porportionem, quàm E D ad A F: & fiat ut H ad G, ita K D ad A F: perque K ducatur K L ipsi C D æquidistans; & iungantur L B, L C. Quoniam igitur ut H ad G, ita K D ad A F; ut autem K D ad A F, ita B L C triangulum ad triangulum B A C: triangulum B L C ad triangulum B A C datam habet proportionem, videlicet quam H ad G: & habet L D ipsi D A æqualem. quod faciendum proponebatur.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXV.

DATUM conum scalenum secare per axem plano faciente in eo triangulum, quod ad minimum triangulorum per axem proportionem datam habeat. oportet autem datam proportionem esse maioris ad minus, neque maiorem ea, quam maximum triangulorum per axem habet ad minimum.

SIT datus conus scalenus, cuius axis A B, basis circulus circa B centrum, minimum verò triangulorum per axem A C D: & oporteat eum plano per axem A B ducto ita secare, ut faciat triangulum, quod ad triangulum A C D proportionem quidem habeat eandem, quam recta linea E maior ad F minorem; non autem maiorem, quã maximum triangulorum per axem habet ad minimum A C D. Si igitur E ad F proportionem habeat eandem, quam maximum triangulorum per axem ad minimum; ducemus per B rectam lineam in circulo ad rectos angulos ipsi C D: & per eam & axem planũ producentes, habebimus triangulum æquicrure, quod maximum est omnium, quæ per axem constituuntur, ut demonstratum fuit; habetque ad triangulum A C D proportionem eandem, quam E ad F, videlicet datam. Sed habeat nunc E ad F 22. huius.
proportionem minorẽ, quàm maximum triangulorum per axem ad minimum: & describatur seorsum recta linea G H æqualis ipsi C D; & in ea triangulum K G H triangulo A C D simile; ita ut K G sit æqualis A C, & aliæ aliis itidem æquales. præterea in linea G H constituatur triangulum,

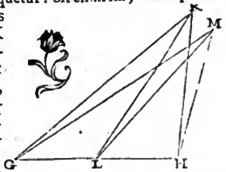


ex præcedenti.

habens eam, quæ à vertice ad punctum basim bifariam secans ducitur, ipsi K L æqualem: habensque ad triangulum K G H proportionem eandem, quam E ad F. erit constituti trianguli vertex ad partes G, ut mox demonstrabitur. sit autem illud triangulum M G H; ita ut latus M G sit maius ipso M H. Quoniam igitur M L est æqualis L K, & G L communis; augulus autem K L G maior angulo M L G: erit K G maior ipsa M G. & est K G æqualis C A. ergo C A, quàm M G, maior erit. rursus quoniam K H est minor, quàm M H, itemque M H minor, quàm M G: erit K H ipsa M G minor. quòd cùm M G sit minor, quàm A C maxima earum, quæ in cono ducuntur; & maior, quàm A D minima: fieri potest, ut à vertice ad basis circunferentiam ducatur recta linea æqualis ipsi M G, quemadmodum antea tradidimus. ducatur ergo, & sit A N; iunganturque N B X, A X. Et quoniam A N est æqualis M G; 23. huius.

& N B ipsi G L, & B A ipsi L M: erit totum A N B triangulum triangulo M G L æquale, angulusque A B N æqualis angulo M L G. quare & A B X angulus ipsi M L H æqualis. rursus quoniam A B est æqualis L M, & B X ipsi L H, angulusque A B X angulo M L H: erit & A X æqualis M H. sed A N æqualis erat M G, & basis N X basi G H. triangulum igitur A N X est æquale triangulo G M H. at triangulum G M H ad triangulum G K H, hoc est ad ipsum C A D habet eandem proportionem, quàm E ad F. ergo & triangulum A N X ad A C D triangulum proportionem habet eandem, quàm E ad F. constitutum est igitur triangulum per axem A N X, quemadmodum proponebatur.

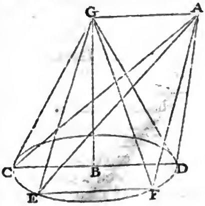
QVOD si quis dicat triangulũ in linea G H descriptum, maius scilicet triangulo G K H ad partes H verticem habere; absurdum sequetur. Sit enim ita; si fieri potest. Et quoniam æquales sunt K L, M L; communis autem L G: erit M L G angulus maior angulo K L G. quare & M G maior, quàm K G. eadem ratione demonstrabitur K H maior, quàm H M. & cùm M G sit maior, quàm G K; & M H minor, quàm H K: habebit M G ad G K maiorem proportionem, quàm M H ad H K; permutandoque G M ad M H maiorem, quàm G K ad K H. triangulum igitur G M H triangulo G K H est minus; quod fieri non potest. ponebatur enim maius. quare triangulum G M H non ad partes H, sed ad eas, in quibus est G, verticem habebit.



THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXVI.

SI conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi; & linea, quæ à vertice facti trianguli ad basim perpendicularis ducitur, non minor sit basis semidiametro: erit triangulum ad rectos angulos basi maximum omnium, quæ extra axem in cono constituuntur, & bases habent dicti trianguli basi æquidistantes.

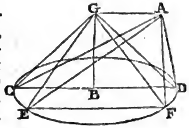
SIT conus, cuius vertex A, basis circulus circa B centrum: & secetur plano per axem, quod faciat A C D triangulum ad rectos angulos basi coni; linea verò, quæ à puncto A ad C D perpendicularis ducitur, non sit minor semidiametro basis. Dico triangulum A C D maximum esse omnium, quæ in cono constituuntur, & bases habent ipsi C D æquidistantes. Ducatur enim in circulo linea E F æquidistans C D: & in ipsa triangulum A E F describatur. in plano autem A C D trianguli ad rectos angulos ipsi C D erigatur B G: & ducatur A G eidem C D æquidistans. erit linea B G æqualis ei, quæ à puncto A ad C D perpendicularis ducta fuerit. itaque iunctis G C, G D, G E, G F, intelligatur conus, cuius vertex G, axis G B, & basis circulus circa B centrum descriptus; atque in eo intelligantur triangula, per axem quidem G C D, extra axem verò E G F. Quoniam igitur B G non est minor semidiametro basis: triangulum G C D ex iam demonstratis, maius erit triangulo G E F, & maius omnibus triangulis, quæ in cono constituuntur, basesque habent ipsi C D æquidistantes. sed tri- 5. huius.



triangulum G C D æquale eſt triangulo A C D, quòd ſit in eadem baſi, & in eiſdem parallelis; triangulumque G E F æquale triangulo A E F. ergo triangulum A C D triangulo A E F eſt maius. ſimiliter etiam maius demonſtrabitur omnibus alijs, quæ baſes habent æquidiſtantes ipſi C D. triangulum igitur A C D omnium eiuſmodi triangulorum maximum eſt. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVII.

AT ſi à puncto A ad C D perpēdicularis ducta minor ſit ſemidiametro baſis: non erit triangulum A C D maximum omnium, quæ baſes ipſi C D æquidiſtantes habent. demonſtratio autem & figura eadem eſt.

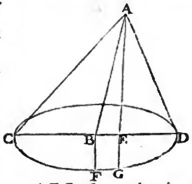


QVONIAM enim G B minor eſt ſemidiametro baſis: triangulum G C D non erit maximum omnium, quæ baſes habent ipſi æquidiſtantes: ſiquidem ut demonſtravimus, & eo maiora triangula, & minora, & æqualia conſtituuntur. Quòd ſi triangulum G C D minus ſit triangulo G E F; & A C D triangulum triangulo A E F erit minus; & ſi maius, maius; & ſi æquale, ſimiliter æquale erit.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXVIII.

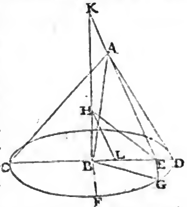
SI cono ſcaleno planis per verticem ſecto, in baſibus æquidiſtantibus triangula æquicruria fiant; ſitque axis coni non minor ſemidiametro baſis: triangulum æquicrure per axem tranſiens maximum erit omnium æquicrurium, quæ ex ea parte, ad quam axis inclinat, conſtituuntur.

SIT conus, cuius axis A B, baſis circulus circa B centrum; trianguli verò per axem, conſtituti ad rectos angulos ipſi circulo, baſis ſit C B D: & angulus A B D minor ſit angulo recto; ita ut A B ad partes D inclinet, ſitque A B non minor ſemidiametro baſis. Dico triangulum æquicrure per A B tranſiens maximum eſſe æquicrurium omnium, quæ inter puncta B, D baſes habent. Sumatur enim in linea B D contingens punctum E: & ipſi C D ad rectos angulos ducantur in circulo B F, E G; & iungatur A E. Itaque B A vel minor eſt, quàm A E, vel non minor. Ponatur primùm B A non minor, quàm A E. & eſt E G minor, quàm B F. ergo A B ad A E maiorem proportionem habet, quàm E G ad B F: & iccirco A B F rectangulum maius eſt rectangulo A E G. ſed rectangulo A B F æquale eſt triangulum baſim habens duplam ipſius B F, & altitudinem A B, hoc eſt triangulum æquicrure per axem conſtitutum: rectangulo autem A E G eſt æquale triangulum, cuius baſis dupla eſt E G & altitudo A E. ergo triangulum æquicrure per axem maius eſt æquicruri per A E conſtituto. ſimiliter quoque triangulum per axem 1.huius.



axem triangulorum omnium, quæ inter B D bases habent, maximum demonstrabitur.

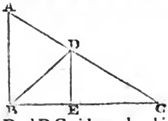
SED sit B A minor, quàm A E. Et quoniam angulus A B E minor est recto: ducatur in plano trianguli A B E linea B H perpendicularis ad C D, quæ ipsi E G sit æqualis; & iungantur H E, B G. cùm igitur angulus A B E angulo A E B sit maior; erit angulus A E B minor recto. rectus autem est H B E. ergo lineæ H B, A E productæ inter se convenient. conveniant ad punctum K: & per H ducatur H L ipsi K E æquidistans. Itaque quoniam H B est æqualis E G, communis autem B E; & angulos æquales continent, videlicet rectos: erit B G ipsi H E æqualis. rursus quoniam rectus est angulus H B L: linea H E maior erit, quàm H L. ergo B H ad H E minorem proportionem habet, quàm B H ad H L. ut autem B H ad H L, ita B K ad K E. quare B H ad H E minorē habet proportionem, quàm B K ad K E. sed B K ad K E habet minorem, quàm B A ad A E, ut in sequenti theoremate ostendetur. multò igitur B H ad H E minorem habebit proportionem, quàm B A ad A E. ergo B A ad A E maiorem proportionem habet, quàm B H ad H E, videlicet, quàm E G ad G B, hoc est ad B F. quòd cùm B A ad A E maiorem habeat proportionem, quàm E G ad B F; erit rectangulum A B F maius rectangulo A E G. sed rectangulo A B F æquale est triangulum æquicruce per axem: & rectangulo A E G æquale triangulum æquicrure per A E, cuius basis sit dupla E G. maius igitur est triangulum æquicrure per axem triangulo æquicruri per A E constituto. eadem ratione demonstrabitur maius alijs, quorum bases inter puncta B, D continentur. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIX.

SI in triangulo orthogonio ab angulo recto ad subtensam quædam linea ducatur: habebit ducta ad partem, quæ inter ipsam & unam continentium angulum rectum interijcitur, maiorem proportionem, quàm reliqua rectum angulum continens ad lineam subtensam.

SIT triangulum A B C rectum habens angulum ad B, à quo ad A C basim ducatur linea B D. Dico B D ad D C maiorem proportionem habere, quàm B A ad A C. Ducatur enim per D linea D E ipsi A B æquidistans. Et quoniā recti anguli sūt ad E: maior erit B D, quàm D E. ergo B D ad D C maiorem habet proportionem, quàm E D ad D C. sed ut E D ad D C, ita B A ad A C. maiorem igitur proportionem habebit B D ad D C, quàm B A ad A C. ex quibus constat B A ad A C minorem habere proportionem, quàm B D ad D C. id quod nobis ad antecedens utile erit.

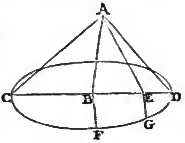


THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXX.

SI cono scaleno planis per verticem secto, in basibus æquidistan-

diſtantibus æquicruria triangula conſtituantur ex ea parte, ad quam axis inclinat; & dictorum triangulorum unum aliquod æquale ſit triangulo æquicruri per axem: recta linea, quæ à vertice ad baſim trianguli perpendicularis ducitur, ipſo axe maior erit.

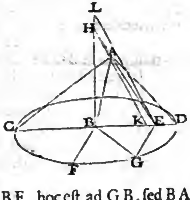
SIT conus ſcalenus, cuius vertex A, axis A B ad partes D inclinans, & baſis circulus circa centrum B: trianguli autem per axem ad rectos angulos circulo baſis ſit C B D; & ad ipſam C D perpendiculares B F, E G in circulo ducantur; iungaturque A E; & ponatur triangulum æquicrure per A E, E G tranſiens æquale eſſe triangulo per A B, B F, hoc eſt triangulo æquicruri per axem. Dico A E maiorem eſſe ipſa A B. Quoniam enim triangulum æquicrure per A E, E G æquale eſt triangulo per A B, B F: erit rectangulum A E G æquale A B F rectangulo. ut igitur B F ad E G, ita E A ad A B. ſed B F eſt maior, quàm E G. ergo & A E, quàm A B maior erit. 14. ſexti.



THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXI.

SI cono ſcaleno per verticem planis ſecto, in baſibus æquidiſtantibus æquicruria triangula conſtituantur ex ea parte, ad quam axis inclinat; & dictorum triangulorum unum aliquod æquale ſit triangulo æquicruri per axem: axis coni ſemidiametro baſis minor erit.

SIT conus ſcalenus, cuius vertex A, axis A B ad partes D inclinans, & baſis circulus circa B centrum: trianguli verò per axem ad rectos angulos circulo baſis ſit C B D; & ad ipſam C D perpendiculares in circulo ducantur B F, E G; iungaturque A E: & ponatur triangulo, per A B & duplam B F tranſeunti, hoc eſt triangulo æquicruri per axem æquale triangulum æquicrure per A E & duplam E G. Dico axem A B ſemidiametro baſis minorem eſſe. Quoniam enim angulus A B E minor eſt recto: ducatur in plano trianguli A B E linea B H ad rectos angulos ipſi C D. & quoniam E A maior eſt, quàm A B, ex ijs, quæ in antecedente demonſtrata ſunt: angulus B E A minor eſt recto. rectus autem H B E. ergo lineæ H B, E A productæ inter ſe convenient. conveniant in H. Cùm igitur triãgulum æquicrure per axem ſit æquale rectangulo A B F; triangulum verò æquicrure per A E & duplam E G æquale ſit rectangulo A E G; & ſint triangula æquicruria inter ſe æqualia: erit rectangulum A B F rectangulo A E G æquale. ergo ut B A ad A E, ita E G ad B F, hoc eſt ad G B. ſed B A ad A E maiorem habet proportionem, quàm B H ad H E per vigeſimam nonam huius. ergo ut B A ad A E, ita B H ad minorem, quàm H E, & ad maiorem, quàm H B. ſit ut B A ad A E, ita B H ad H K: & per E ducatur E L æquidiſtans K H, conveniensque cum B H in L. Itaque quoniam ut B A ad A E, ita B H ad H K, hoc eſt B L ad L E. ut autem B A ad A E, ita E G ad G B. erit ut B L ad L E, ita E G ad G B.



ſunt

sunt igitur duo triangula L B E, G E B, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, nempe rectum: circa alios autem angulos, qui ad L,G, latera habent proportionalia; & reliquorum angulorum uterque est acutus. ergo triangula L B E, G E B inter se similia sunt: & ut L B ad B E, ita G E ad E B. quare L B ipsi G E est æqualis. minor autem est E G semidiametro basis. ergo & B L semidiametro basis minor erit. & quoniam utræque E L, L B maiores sunt, quàm utræque E A, A B. ut autem E L ad L B, ita E A ad A B: & componendo ut utræque E L, L B ad B L, ita utræque E A, A B ad B A; permutandoque. sed maiores sunt utræque E L, L B, quàm utræque E A, A B. ergo & L B maior erit, quàm B A. ostensa est autem L B minor semidiametro basis. quare & B A semidiametro basis minor erit. quod demonstrare oportebat.

7. sexti.

COMMENTARIVS.

A ET quoniam E A maior est, quàm A B, ex ijs, quæ in antecedente demonstrata sunt: angulus B E A minor est recto.) *Nam cùm E A sit maior, quàm A B; erit ex decima octaua primi Elementorum angulus A B E maior angulo B E A. sed angulus A B E est minor recto. ergo B E A angulus recto multò minor erit.*

B Et ad maiorem, quàm H B.) *Est enim B A minor ipsa A E, ut proximè demonstratum fuit. quare & B H minor erit ea, ad quam ita se habet, ut B A ad A E.*

C Et quoniam utræque E L, L B maiores sunt, quàm utræque E A, A B.) *Ex vigesima prima primi Elementorum.*

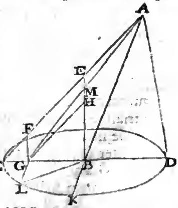
THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXXII.

SI cono scaleno planis per verticem secto, in basibus æquidistantibus triangula æquicruria constituantur ex ea parte, à qua axis declinat: triangulum æquicrure per axem transiens non erit omnium eiusmodi triangulorum minimum.

SIT conus scalenus, cuius axis A B, basis circulus circa B centrum; plani verò per axem ducti ad rectos angulos circulo, & ipsius circuli communis sectio sit diameter C B D: sitque A B D angulus recto minor. Dico triangulum æquicrure per axem transiens non esse minimum omnium triangulorum æquicrurium, quæ inter puncta C,B bases habent. Iungatur enim A C: & in triangulo A B C ad rectos angulos ipsi C D ducatur B E. Itaque quoniam C E maior est semidiametro basis C B: sit E F æqualis semidiametro; & F G ducatur ipsi E B æquidistans; iungaturque A M G: rursus ducatur G H æquidistans F E. ergo F H parallelogrammum est: & propterea F E ipsi G H est æqualis, & G H æqualis semidiametro basis. denique in circuli plano ducantur G L, B K ad rectos angulos ipsi C D: & iungatur B L. Quoniam igitur duo triangula orthogonia H G B, L B G rectos angulos æquales habent: & circa alios angulos latera proportionalia, & reliquorum uterque est acutus; erunt ea triangula inter se similia; & ideo ut G H ad H B, ita B L ad L G. habet autem G H ad H B maiorem proportionem, quàm G M ad M B: & G M ad M B, item maiorem, quàm G A ad A B. ergo G H ad H B maiorem proportionem habebit

7. sexti.

A



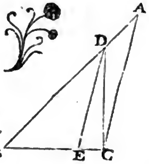
quàm

quàm GA ad A B. sed ut G H ad H B, ita B L, hoc est B K ad L G quare B K ad L G habet maiorē proportionem, quàm GA ad A B. rectangulū igitur A B K maius est rectangulo A G L, hoc est triangulū æquicrure per axem maius triangulo æquicruri per A G, cuius basis est ipsius L G dupla. non ergo triangulum æquicrure per axem minimum est omnium eiusmodi triangulorum, quæ inter puncta B, C bases habent. 1. huius.

COMMENTARIVS.

HABET autem G H ad H B maiorem proportionem, quàm G M ad M B.) *Ex secunda huius.* A

Et G M ad M B item maiorem, quàm G A ad A B.) *Illud autem nos hoc lemmate demonstrabimus.* B

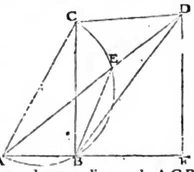


SIT triangulum ambligonium ABC; & ab angulo eius obtuso C ducatur CD perpendicularis ad BC, quæ lineam BA in D secet. Dico BC ad CA maiorem proportionem habere, quàm BA ad AC.

DVCATVR enim à puncto D ad BC linea DE ipsi AC æquidistans. erit ob triangulorum BDE, BAC similitudinem, ut BD ad DE, ita BA ad AC. sed cùm DE sit maior, quàm DC; subtenditur enim angulo DCE recto: habebit BD ad DC maiorem proportionem, quàm BD ad DE, hoc est, quàm BA ad AC. 8. quinti.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXIII.

SI in eadem basi duo triangula constituantur; & alterius quidem latus sit ad rectos angulos basi; alterius verò ad angulos obtusos; sitque ambligonij trianguli altitudo non minor altitudine orthogonij: angulus, qui ad orthogonij verticem, angulo, qui ad verticem ambligonij, maior erit.



CONSTITVANTVR in basi A B triangula A C B, A D B: angulusque A B C sit rectus, & A B D obtusus; linea verò, quæ à puncto D ad A B basim perpendicularis ducitur, videlicet D F non minor sit perpendiculari C B. Dico angulū A C B angulo A D B maiorem esse. Quoniam enim æquidistantes sunt B C, D F, & ad rectos angulos ipsi A B F; non minor autem D F, quàm C B: erit D C B angulus non minor recto. quare A D maior est, quàm A C. 19. primi. & cùm triangulum A B C orthogonium sit; in semicirculo continetur, cuius diameter A C. ergo descriptus circa ipsam semicirculus lineam A D secabit. secet in E, & E B iungatur. erit A E B angulus æqualis angulo A C B. 21. tertii. sed angulus A E B est maior ipso A D B. ergo A C B angulus angulo A D B maior erit. 16. primi.

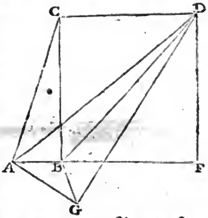
THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXIV.

IISDEM positis, si trianguli orthogonij angulus ad verticem

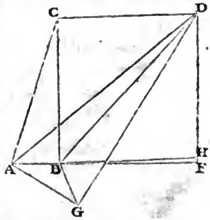
non

non maior sit eo, qui continetur linea vertices triangulorum coniungente, & latere ambligonij, quod obtusum angulum cum basi efficit: linea, in triangulo orthogonio subtensa angulo recto, ad eam, quæ est ad rectos angulos basi, minorem habet proportionem, quàm subtensa angulo obtuso in ambligonio ad eam, quæ est ad angulos obtusos.

DESCRIBANTVR triangula; & sit A C B angulus non maior angulo C D B. Dico A C ad C B minorem habere proportionem, quàm A D ad D B. Quoniam enim
in antecedente. angulus A C B maior est angulo A D B, ut ostensum fuit; & angulus C A B maior D A B angulo: constituatur ipsi quidem angulo A C B æqualis angulus A D G; angulo autem C A B æqualis D A G. erunt triangula A C B, A D G inter se similia.
A quare ut D A ad A C, ita G A ad AB. & continent æquales angulos. iuncta igitur
6. sexti. G B, triangulum D A C triangulo G A B simile erit, & angulus A C D angulo A B G æqualis. Quoniam igitur D F non est minor ipsa C B: vel æqualis erit, vel maior. Sit primùm æqualis. ergo C F parallelo-
B grammum est rectangulum: & propterea angulus D C B unà cum angulis C B D, D B F est æqualis duo-
C bus rectis. sed angulo C D B, hoc est D B F non est
29. primi. maior angulus A C B. ergo angulus D C B unà cum angulis C B D, A C B, videlicet anguli A C D, C B D non sunt duobus rectis maiores. angulo autem A C D æqualis est angulus A B G. anguli igitur A B G, C B D non sunt maiores duobus rectis. apponatur angulus A B C rectus. quare anguli A B G, A B D
D non sunt maiores tribus rectis: & iccirco D B G reliquus ex quatuor rectis non est re-
19. primi. cto minor. maior igitur D G, quàm D B. & A D ad D G minorem habet proportio-
8. quinti. nem, quàm A D ad D B. sed ut A D ad D G, ita A C ad C B. ergo A C ad C B minorem proportionem habebit, quàm A D ad D B.



SED sit D F maior, quàm C B. ergo D C B angulus est obtusus. Itaque ducatur B H ipsi C D æquidistans. Et quoniam angulus D C B unà cum angulis C B D, D B H est æqualis duobus rectis; angulo autem C D B, hoc est D B H non est maior angulus A C B: erunt eadem ratione, qua supra, anguli A C D, C B D, hoc est A B G, C B D non maiores duobus rectis. ergo A B D, A B G non sunt maiores tribus rectis; & D B G non est recto minor. quare
E G D maior est, quàm D B; ideoque A D ad D G minorem habet proportionem, quàm A D ad D B. quod demonstrare oportebat.



COMMENTARIVS.

A ET continent æquales angulos.] *Factus est enim angulus D A G æqualis ipsi C A B. quare dempto communi angulo D A B, reliquus G A B reliquo D A C æqualis erit.*

B Et propterea angulus D C B unà cum angulis C B D, D B F est æqualis duobus rectis.] *Ex vigesima nona primi Elementorum.*

Sed

Sed angulo C D B, hoc est D B F, non est maior angulus A C B.) *Ex positione scilicet.* C

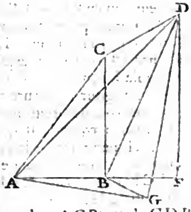
Et icciro D B G reliquus ex quatuor rectis.) *Ex 13. primi Elementorum.* D

Ideoque A D ad D G minorem habet proportionem, quàm ad D B. quod demonstrare oportebat.] *Nam hoc est, quod demonstrare oportet: sed illud potius A C ad C B minorem proportionem habere, quàm A D ad D B, quod quidem ex his eodem, quo supra, modo concludetur. Hoc theorema à Sereno ita quidem demonstratũ invenitur. Sed non video, cur necesse sit ducere lineam ipsi C D æquidistantem, & demonstrationem in duas partes secare. nam sive angulus D C B rectus sit, sive obtusus, trianguli B C D tres angulos duobus rectis æquales esse, manifestò constat. Quare una eademque demostratio in utroque casu satisfacere poterit, hoc modo.* E

DESCRIBANTVR triangula; & sit A C B angulus non maior angulo C D B. Dico A C ad C B minorem habere proportionem, quàm A D ad D B. Quoniam enim angulus A C B maior est angulo A D B; ut ostensum fuit; & angulus C A B maior D A B angulo: constituatur ipsi quidem angulo A C B æqualis angulus A D G; angulo autem C A B æqualis D A G. erunt triangula A C B, A D G inter se similia. quare ut D A ad A C, ita G A ad A B. & continent æquales angulos. iuncta igitur G B, triangulum D A C triangulo G A B simile erit. angulus autem B C D unà cum angulis C B D, C D B est æqualis duobus rectis: & angulo C D B non est maior angulus A C B. ergo B C D angulus unà cum angulis C B D, A C B; videlicet anguli A C D, C B D non sunt duobus rectis maiores. sed angulo A C D æqualis est angulus A B G, propter similitudinem triangulorum A C D, A B G. anguli igitur A B G, C B D non sunt maiores duobus rectis. apponatur angulus A B C rectus. quare anguli A B G, A B D non sunt maiores tribus rectis: & icciro D B G reliquus ex quatuor rectis non est recto minor. maior igitur est D G, quàm D B: & A D ad D G minorem habet proportionem, quàm ad D B. sed ut A D ad D G, ita A C ad C B. ergo A C ad C B minorem proportionẽ habebit, quàm A D ad D B. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXV.

IISDEM positis, si in triangulo orthogonio subtensa angulo recto ad eam, quæ est ad rectos angulos basi, maiorem proportionem habeat, quàm angulo obtuso subtensa in ambligonio ad eam, quæ est ad angulos obtusos: angulus ad verticem orthogonij maior est angulo, qui linea vertices triangulorum coniungente, & ea, quæ est ad angulos obtusos basi, continetur.



TONATVR eadem figura, iisdem constructis. Quoniam A C ad C B maiorem proportionem habet, quàm A D ad D B; ut autem A C ad C B, ita A D ad D G: A
habebit A D ad D G maiorem proportionem, quàm A D ad D B: & ob id minor erit G D, quàm D B. angulus igitur D B G minor est recto. quare reliqui A B D, B
A B G tribus rectis sunt maiores. sed angulus A B G æqualis est angulo A C D. ergo A C D, A B D anguli maiores sunt tribus rectis. auferatur angulus rectus A B C. erunt A C D, C B D anguli duobus rectis maiores. quoniam igitur angulus B C D unà cum angulis C
A C B, C B D est maior duobus rectis; unà verò cum ipsis C D B, C B D est duobus rectis æqualis: sequitur angulum A C B angulo C D B maiorem esse. D

COMMENTARIVS.

A VT autem A C ad C B, ita A D ad D G.) *Positum enim est triangulum A D G triangulo A C B simile.*

B Angulus igitur D B G minor est recto.) *Nam cùm sit G D minor, quàm D B; erit ex decima octava primi angulus D G B maior angulo D B G. ergo D B G est recto minor: si enim esset rectus; trianguli B D G tres anguli duobus rectis maiores essent.*

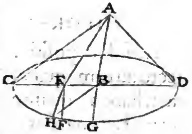
C Sed angulus A B G æqualis est angulo A C D.) *Ob triangulorum A C D, A B G similitudinem.*

D Quoniam igitur angulus B C D unà cum angulis A C B, C B D est maior duobus rectis.) *Sunt enim hi tres anguli æquales angulis A C D, C B D, qui duobus rectis maiores erant.*

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXVI.

SI cono scaleno per verticem planis secto, in basibus æquidistantibus triangula æquicruria constituantur ex ea parte, à qua axis declinat: triangulum æquicrure per axem transiens omnium eiusmodi triangulorum neque maximum, neque minimum erit.

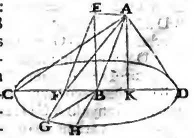
SIT conus cuius axis A B, & basis circulus circa B centrum: plani verò per axem ad rectos angulos circulo, & ipsius circuli communis sectio sit C B D; sitque A B D angulus recto minor. Dico triangulum æquicrure per axem triangulorum omnium æquicrurium, quæ bases habent inter puncta C, B, neque maximum esse, neque minimum. Vel enim axis est minor basis semidiametro, vel maior, vel ipsi æqualis. Sit primùm minor. Et quoniam A B minor est semidiametro basis: aptetur A E æqualis semidiametro; perque puncta B & E ducantur in circulo E F, B G ad rectos angulos ipsi C D: & angulo A E B æqualis constituatur E B H; & H E iungatur. Quoniam igitur utraque A E, B H æqualis est semidiametro; communis



6. sexti. autem B E; & continent æquales angulos: & reliqua latera æqualia, & triangula

A inter se similia erunt. ergo ut E A ad A B, ita B H ad H E. & quoniam E F maior est, quàm E H; æquales autem B G, B H: habebit B H ad H E maiorem proportionem, quàm B G ad F E. sed ut B H ad H E, ita E A ad A B. quapropter E A ad A B maiorem proportionem habet, quàm B G ad E F:

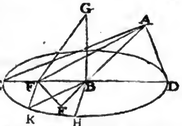
1. huius & iccirco rectangulum A E F maius est rectangulo A B G; hoc est triangulum æquicrure per A E, cuius basis est dupla E F, maius triangulo æquicruri per axem. triangulum igitur æquicrure per axem non est omnium eiusmodi triangulorum maximum. Sed sit axis A B semidiametro æqualis. Itaque angulus A B D recto minor, vel minor est medietate recti, vel non. Sit primùm non minor medietate recti: & per A in plano ad circulum recto ducatur A E ipsi C B æquidistans, & E F æquidistans A B; iungaturque F A: in circulo autem ducantur B H, F G ad rectos angulos ipsi C D; & B G iungatur. Quoniam igitur angulus A B D non est minor medietate recti: neque B A E medietate recti minor erit.



ergo

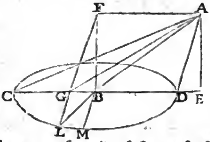
ergo E B A, hoc eſt F E B non eſt maior medietate recti: & ideo F E B angulus non maior eſt angulo E A B. itaque duo triangula F E B, F A B in eadem baſi conſtituta ſunt: & perpendicularis à puncto A ad C D ducta, videlicet A K non eſt minor ipſa E B. angulus autem F E B orthogonij trianguli non maior angulo E A B. quare ex trigeſimo quarto theoremate, F E ad E B minorem habet proportionem, quàm F A ad A B. ſed ut F E ad E B, ita B G, hoc eſt B H ad F G: æqualis enim eſt E F ipſi ſemidiametro. ergo B H ad F G minorem habet proportionem, quàm F A ad A B: & propterea rectangulum A B H minus eſt rectangulo A F G, hoc eſt triangulum æquicrure per axem minus triangulo æquicruri per A F. non igitur triangulum æquicrure per axem omnium eiuſmodi triangulorum maximum erit. B 1.huius.

SIT deinde A B D angulus minor medietate recti: & producatur A B uſque ad E; ita ut B E ſit æqualis dimidio ſemidiametri: in plano autem ad circulum recto, in quo eſt A E, ducatur E F ad ipſam perpendicularis; & B G perpendicularis ad C D: & angulo B F G ſubtendatur F G æqualis ſemidiametro; iungaturque F A. Quoniam igitur angulus A B D, hoc eſt F B E minor eſt medietate recti; rectus autem, qui ad E: erit B E maior, quàm E F. & eſt quadratum F B æquale quadratis F E, E B; quorum quidem quadratum E B maius eſt quadrato F E. ergo quadratum F B minus eſt, quàm duplum quadrati B E: & propterea quadratum F G maius, quàm duplum quadrati F B. reliqui igitur quadrati B G erit quadratum F G minus, quàm duplum. & quoniam E B dimidia eſt ſemidiametri; quod bis continetur A B, B E æquale eſt quadrato B A. ſed quadratum F A eſt æquale quadratis A B, B F, & duplo rectanguli A B E: duplum verò rectanguli A B E æquale eſt quadrato A B. quadratum igitur F A duplo quadrati A B, & quadrato B F æquale erit. ergo quadratum F A maius eſt, quàm duplum quadrati A B. demonſtratum autem eſt quadratum F G minus, quàm duplum quadrati G B. quadratum igitur F G ad quadratum G B minorem proportionem habet, quàm quadratum F A ad A B quadratum. ergo & F G ad G B minorem habet proportionem, quàm F A ad A B. quòd ſi rurſus in circulo ducantur F K, B H ad rectos angulos ipſi C D, & iungatur B K; habebit B H ad F K minorem proportionem, quàm F A ad A B. triangulum igitur æquicrure per axem minus eſt triangulo æquicruri per A F ducto. quare triangulum æquicrure per axem non erit omnium triangulorum, de quibus dictum eſt, maximum.



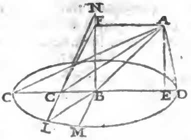
C 47.primi. D E 12.ſecũdi. 17.huius. F

DENIQVE ſit axis A B ſemidiametro maior: & in plano ad circulum recto ducatur A E ad C D perpendicularis; quæ vel minor erit ſemidiametro, vel non minor. Sit primùm minor; perque A ducatur A F ipſi C D æquidiſtans; & per B ipſa B F æquidiſtans A E: & conſtituatur angulus B F G non maior angulo F A B; iungaturque G A. Rurſus ex iam demonſtratis G F ad F B minorem proportionem habebit, quàm G A ad A B. Itaque quoniam F B æqualis A E eſt minor ſemidiametro; & G F maior, quàm F B: erit F G vel maior ſemidiametro, vel minor, vel æqualis. Sit primùm æqualis: & in circulo ducantur G L, B M ad ipſam C D perpendiculares, ut ſuperiùs factum eſt; & iungatur B L. Per ea, quæ ſæpius demonſtrata ſunt, habebit G A ad A B maiorem proportionem, quàm B M ad G L. quare triangulum æquicrure per A G, G L maius eſt triangulo per axem æquicruri. 34.huius.

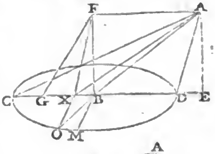


SI verò F G eſt minor ſemidiametro; ſit G N ſemidiametro æqualis. & quoniam G A ad A B maiorem proportionem habet, quàm G F ad F B; G F verò ad 2.huius.

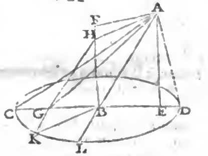
FB maiorem habet, quàm G N ad N B: habebit GA ad A B maiorem proportionem, quàm G N ad N B, hoc eſt quàm B M ad G L; & ita triangulum æquicrure per A G, G L triangulo æquicruri per axem maius erit.



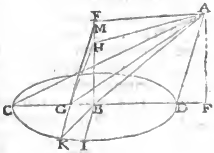
AT ſi F G ſit ſemidiametro maior; ducatur F X ipſi æqualis. Quoniam igitur X F B angulus non eſt maior angulo F A B: iuncta X A ad A B maiorem proportionem habebit, quàm X F ad F B. ut autem X F ad F B, ita B M ad X O. ergo X A ad A B maiorem proportionem habebit, quàm M B ad X O: & propterea triangulum æquicrure per A X, X O maius eſt triangulo æquicruri per axem.



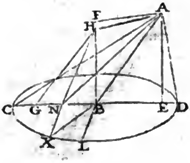
SIT perpendicularis A E non minor ſemidiametro; & F B ſemidiametro æqualis: iungaturque A F; & ducatur linea, ut contingit A H: conſtituatur autem B H G angulus non maior angulo H A B; & iungatur G A. habebit rurſus ex ijs, quæ demonſtrata ſunt, G H ad H B minorem proportionem, quàm G A ad A B. Et quoniam H B minor eſt ſemidiametro; maior autem G H, quàm H B: erit G H vel æqualis ſemidiametro, vel minor, vel maior. Sit primùm æqualis: & ducantur in circulo G K, B L ad rectos angulos ipſi C D. Cùm igitur G A ad A B maiorem habeat proportionem, quàm G H ad H B; & ut G H ad H B, ita B L ad G K: G A ad A B maiorem proportionem habebit, quàm B L ad G K. ergo triangulum æquicrure per A G, G K triangulo æquicruri per axem maius erit.



SI verò H G eſt minor ſemidiametro; ſit ſemidiametro æqualis G M. Itaque quoniam G A ad A B maiorem habet proportionem, quàm G H ad H B;
2. huius. & G H ad H B item maiorem, quàm G M ad M B: habebit G A ad A B maiorem proportionem, quàm G M ad M B, hoc eſt quàm B L ad G K. quare & ita maius erit triangulum æquicrure per A G, G K triangulo per axem æquicruri.



QVOD ſi G H eſt maior ſemidiametro; aptetur H N ſemidiametro æqualis; iungaturque N A: & in circulo rurſus ipſi C B ad rectos angulos ducatur N X. Quoniam igitur N H B angulus non eſt maior angulo H A B: N H ad H B minorem habet proportionem, quàm N A ad A B. ut autẽ N H ad H B, ita B L ad N X. quare B L ad N X maiorem habebit proportionem, quàm N A ad A B. maius igitur eſt triangulum æquicrure per A N, N X triangulo æquicruri per axem. ex quibus ſequitur triangulum æquicrure per axem dictorum triangulorũ æquicrurium non eſſe maximum. demõſtratum autem eſt in trigeſima ſecũda huius generaliter neque minimum eſſe. ergo neque maximum, neque minimum erit. quod oportebat demonſtrare.



COM-

COMMENTARIVS.

ET quoniam E F maior eſt, quàm E H.) *Nam cùm triangula A E B, H B E ſimilia ſint; erit angulus B E H, æqualis ſcilicet angulo E B A, obtuſus, & maior recto B E F. quare punctum H inter C & F cadit: & propterea ex ſeptima tertij Elementorum maior eſt E F, quàm E H.* A

Sed ut F E ad E B, ita B G, hoc eſt B H ad F G: æqualis enim eſt E F ipſi ſemidiametro.) *Etenim E F eſt æqualis ipſi A B, quam ſemidiametro æqualem poſuimus. ſunt igitur duo triangula F E B, B G F, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, nempe rectum; & circa alios angulos latera proportionalia, immo verò æqualia: & reliquorum angulorum vterque eſt minor recto. ergo ea & æqualia, & inter ſe ſimilia erunt. ut igitur F E ad E B, ita erit B G ad G F, hoc eſt B H ad F G.* B

Erit B E maior, quàm E F.] *Quoniam enim angulus F B E minor eſt medietate recti; & rectus, qui ad E: erit B F E maior medietate recti; & ideo maior, quàm F B E. quare ſequitur lineam B E ipſa E F maiorem eſſe.* C 19.primi.

Et propterea quadratum F G maius, quàm duplum quadrati F B.) *Quoniam enim F G æqualis ſemidiametro, dupla eſt ipſius B E: erit quadratum F G quadrati B E quadruplum. quadratum autem F B minus eſt, quàm duplum quadrati B E. ergo quadratum F G maius erit, quàm duplum quadrati F B.* D

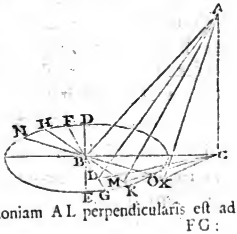
Reliqui igitur quadrati B G erit quadratum F G minus, quàm duplum.) *Nam cùm quadratum F G ſit æquale duobus quadratis F B, B G; ſitque quadratum F B minus, quàm duplum quadrati B E: erit reliquum quadratum B G maius, quàm duplum eiuſdem B E quadrati; & ideo quadratum F G quadrati B G minus erit, quàm duplum.* E

Habebit B H ad F K minorem proportionem, quàm F A ad A B.] *Erit enim triangulum B K F ſimile triangulo F G B: quod ſuperiùs demonſtratum eſt. cùm igitur F G ad G B minorem habeat proportionem, quàm F A ad A B; & B K, hoc eſt B H ad F K minorem proportionem habebit, quàm F A ad A B.* F

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXVII.

IN omni cono ſcaleno, cùm triangula per axem poteſtate infinita ſint: lineæ, quæ à vertice coni ad baſes dictorum triangulorum perpendiculares ducuntur, omnes in unius circuli circunferentiam cadunt; qui quidem eſt in eodem plano, in quo baſis coni; & circa diametrum, interiectam inter centrum baſis & perpendicularem, quæ à vertice coni ad dictum planum ducitur.

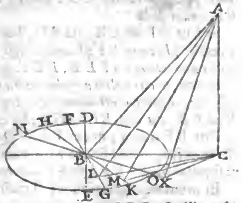
SIT conus ſcalenus, cuius vertex A punctum, baſis circulus circa centrum B, & axis A B; à puncto autem A ad baſis planum perpendicularis ſit A C: & iungatur C B, cui ex puncto B ad rectos angulos ducatur B D in eodem plano: & ducantur, ut contingit, lineæ F G, K H. erunt D E, F G, H K baſes triangulorum, quæ per axem tranſeunt. Itaque à puncto A ad lineas D E, F G, H K perpendiculares ducantur A B, A L, A M. At verò axem A B perpendicularem eſſe ad D E: & perpendiculares A L, A M ad partes B G, B K cadere deinceps oſtendetur. Dico puncta B, L, M in unius circuli circunferentia eſſe, cuius diameter eſt recta



linea B C. Iungantur enim C L, C M. Et quoniam A L perpendicularis eſt ad F G:

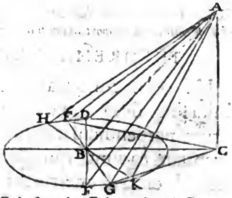
F G : erit F L A angulus rectus. rursus quoniam A C ad basis planum est perpendicularis: anguli A C B, A C L, A C M recti erunt. quare cùm A B quadratum æquale sit quadratis B L, L A; & quadratum L A quadratis L C, C A æquale: erit quadratum A B æquale tribus quadratis B L, L C, C A. est autem & æquale quadratis B C, C A. quadrata igitur B C, C A quadratis B L, L C, C A æqualia sunt. commune auferatur quadratum C A. erit reliquum quadratum B C æquale quadratis B L, L C: & iccirco angulus B L C in basis plano rectus. rursus quoniam quadratum A B æquale est quadratis B M, M A; & quadratum M A æquale quadratis M C, C A: erit A B quadratum æquale quadratis B M, M C, C A. sed & æquale quadratis B C, C A. ergo communi C A ablato, relinquitur quadratum B C quadratis B M, M C æquale. rectus igitur angulus est & B M C in basis plano. quare puncta B, L, M sunt in circunferentia circuli, cuius diameter est B C. similiter & ductis alijs quibuscunque lineis, ut N O X, idem contingere demonstrabimus. quod quidem demonstrare oportebat.

3. diff. undecimi.



AXEM verò A B perpendicularem esse ad ipsam D E; & perpendiculares A L, A M cadere ad partes B G, B K; hoc modo ostendemus.

IVNCTIS enim A D, A E, erit D A E triangulum æquicrure: & ideo linea, quæ à vertice A ad punctum basim bifariam dividens ducitur, perpendicularis est ad D E. iungantur C F, C G, A F, A G. Et quoniam angulus F B C obtusus est, acutus autem C B G: erit linea F C maior, quàm C G; & quadratum F C maius quadrato C G. ergo communi apposito quadrato A C, quadrata F C, C A quadratis G C, C A maiora sunt; hoc est quadratum F A maius quadrato A G. maior igitur est F A, quàm A G. suntque F B, B G inter se æquales; communis autem B A; & maior F A, quàm A G. ergo angulus F B A obtusus est, & A B G acutus. linea igitur, à puncto A ad F G perpendicularis ducta, ad partes B G cadit. Eodem modo & in alijs demonstrabitur.



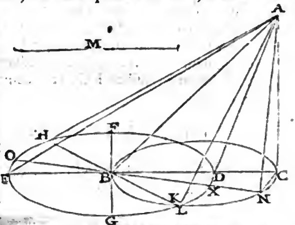
QUARE constat ductas perpendiculares, à puncto sublimi ad circuli circunferentiam cadentes, in coni superficie ferri: cuius quidem basis est circulus à casu perpendicularium descriptus, & vertex idem, qui est primi coni vertex.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXXVIII.

IN cono scaleno dato aliquo triangulo per axem, quod neque maximum sit, neque minimum: invenire aliud triangulum per axem, quod unà cum dato, utrisque maximo & minimo per axem sit æquale.

SIT

SIT conus scalenus, cuius vertex A punctum, basis circulus circa centrum B, axis autem A B, & A C ad basis planum perpendicularis: ducaturque per C & B centrum linea C D B E; cui ad rectos angulos sit F B G. triangulorum igitur, quæ per axem transeunt, maximum quidem erit illud, cuius basis F G & A B altitudo, ut sæpius demonstratum est: minimum verò, cuius basis E D & altitudo A C. Sit datum triangulum per axem, quod basim habeat H K, altitudinemque A L: & oporteat aliud triangulum per axem invenire; quod unà cum eo, cuius basis H K & altitudo A L, utrisque maximo & minimo sit æquale. Itaque quoniam A L perpendicularis est ad basim H K: erit punctum L in circunferentia circuli, cuius diameter B C, ex proximè demonstratis. describatur circulus B L C: & quo utræque lineæ B A, A C superant A L, ei sit æqualis M. Quoniam igitur linearum, quæ à puncto A ad circunferentiam B L C ducuntur, maxima quidem est A B, minima verò A C: erit A L minor, quàm A B; & maior, quàm A C. sed A L unà cum M est æqualis utrisque B A, A C; quarum A L est minor, quàm A B. ergo M quàm A C maior erit; & quadratum M maius quadrato A C. sint quadrato M æqualia quadrata A C, C N, linea C N in circulo aptata: ducaturque N X B O; & N A iungatur. erit angulus B N C in semicirculo rectus. quadratum autẽ A B æquale est quadratis B C, C A; & quadratum B C æquale quadratis B N, N C. ergo quadratum A B quadratis B N, N C, C A æquale erit. quorum quadratis N C, C A æquale est quadratum N A. quadratum igitur A B est æquale quadratis B N, N A: & iccirco angulus B N A rectus. quare A N est altitudo trianguli per axem; cuius basis O B X. & quoniam quadratum M est æquale quadratis A C, C N; & quadratum A N eisdem quadratis æquale: linea M lineæ A N æqualis erit. quare utræque lineæ L A, A N æquales utrisque B A, A C: & rectangulum cõtentum diametro & utrisque L A, A N æquale ei, quod diametro & utrisque B A, A C continetur. sed rectangulum ex diametro & utrisque B A, A C duplum est trianguli maximi & minimi; quorum bases F G, E D; & altitudines B A, A C: rectangulum verò ex diametro & utrisque L A, A N duplum est triangulorum; quorum bases H K, O X; & altitudines L A, A N. triangula igitur, quorum bases H K, O X, & altitudines L A, A N, æqualia sunt triangulis maximo & minimo per axem. & datum est triangulum in basi H K. ergo triangulum per axem in basi O X inventum est, quod unà cum dato utrisque maximo & minimo sit æquale.



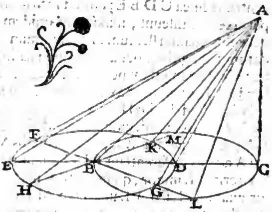
THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXIX.

SI duorum triangulorum per axem bases abscindant æquales circunferentias ad diametrum, quæ per lineam perpen dicularem ducitur: triangula inter se æqualia erunt. vocentur autem eiusdem ordinis. ὁμοταγῆ

SIT conus, cuius vertex A punctum, basis circulus circa centrum B, & axis A B, perpendicularis autem ad basim A C: & per C punctum perpendicularis diameter sit

C D

CDBE: ducanturque FBG, HBK, quæ ad ED æquales circunferentias KD, DG abſcindant. Dico triangula per axem, quorum baſes FG, HK, inter ſe æqualia eſſe. Deſcribatur enim circa BC diametrum circulus BLCM; & iungantur AL,



37. huius AM, quæ perpendiculares erũt; AL quidem ad FG, AM verò ad HK. Et quoniam angulus CBM æqualis eſt angulo CBL: & linea MB ipſi BL æqualis erit. ſed quadratum AB quadratis AM, MB eſt æquale; itemque æquale quadratis AL, LB. ergo quadrata AM, MB æqualia ſunt AL, LB quadratis: quorum quadratum MB eſt æquale quadrato BL. reliquum igitur quadratum MA æquale eſt quadrato AL; & linea LA æqualis ipſi AM, quæ quidem ſunt triangulorum altitudines; quorum baſes FG, HK. ergo triangula per axem, in baſibus FG, HK conſtituta, inter ſe æqualia erunt. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XL.

TRIANGULORUM per axem, quæ eiuſdem ſunt ordinis, & æqualia & inter ſe ſimilia erunt.

SINT triangula eiuſdem ordinis, ut in antecedenti figura FAG, HAK. Dico & æqualia & inter ſe ſimilia eſſe. æqualia enim iam demonſtrata ſunt: ſimilia verò hoc modo demonſtrabimus. Quoniam AB in utroque triangulorum ducta eſt à vertice ad punctum, quod baſim bifariam dividit; & quadratum AB quadratis AM, MB eſt æquale; itemque æquale quadratis AL, LB, quorum quadratum AM æquale eſt quadrato AL: erit reliquum MB quadratum quadrato BL æquale, & linea MB æqualis ipſi BL. quare & tota MH toti LF. eſt autem MA æqualis LA. ergo & quæ ex ipſis efficiuntur, quadrata inter ſe ſunt æqualia, hoc eſt quadratum AF æquale quadrato AH: & propterea linea AF lineæ AH. ſimiliter etiam AK ipſi AG æqualis demonſtrabitur. ſed & baſes FG, HK ſunt æquales. triangula igitur FAG, HAK, & æqualia & inter ſe ſimlia erunt.

MANIFESTUM autem eſt & huius theorematis converſum.

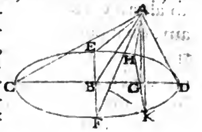
THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XLI.

SI coni ſcaleni axis æqualis ſit baſis ſemidiametro; erit ut maximũ triangulorum, quæ per axem conſtituuntur ad minimum, ita minimum ad æquicrure, quod eſt ad rectos angulos baſi.

SIT conus ſcalenus, cuius vertex punctum A; & axis AB recta linea, quæ ſit æqualis ſemidiametro baſis: baſis verò circulus circa B centrum: & triangulorum per axem, ad rectos quidem angulos baſi ſit CAD, æquicrure autem EAF. erit EAF maximum omnium, quæ per axem conſtituuntur, & CAD minimum, ex iis, quæ

prius

priùs demonstrata sunt. Ducatur à puncto A ad basim perpẽdicularis A G, quæ in diametrum C D cadet; & H G K ad rectos angulos ipsi C D: ducaturque planũ faciens triangulum æquicrure H A K, quod ad basim rectum erit. Dico ut triangulum E A F, maximum scilicet eorum, quæ per axem constituuntur, ad C A D minimum; ita C A D ad æquicrure H A K. Quoniam enim triangulorum E A F, C A D bases sunt æquales, diametri scilicet E F, C D; altitudo autem trianguli E A F est B A, & ipsius C A D altitudo A G: erit ut B A ad A G, ita E A F triangulum ad triangulum C A D. rursus quoniam triangulorum C A D, H A K eadem est altitudo A G; trianguli autem C A D basis C D, hoc est E F; & trianguli H A K basis H K: erit ut E F ad H K, ita triangulum C A D ad triangulum H A K. sed ut E F ad H K, ita earum dimidiæ, hoc est B K ad K G: & ut B K ad K G, ita B A ad A G; similia etenim sunt triangula orthogonia B G K, B G A. triangulum igitur C A D ad triangulum H A K est ut B A ad A G. erat autem & triangulum E A F ad ipsum C A D, ut B A ad A G. ergo ut E A F triangulum ad triangulum C A D, ita C A D ad triangulum H A K. quod oportebat demonstrare. 18. undecimi.



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLII.

RURSUS sit ut triangulum E A F ad C A D, ita C A D ad H A K. Dico axem B A semidiametro basis æqualem esse.

QVONIAM enim ut triangulum E A F ad C A D, ita B A ad A G; & ut E A F ad C A D, ita C A D ad H A K: erit ut C A D ad H A K, ita B A ad A G. ut autem C A D ad H A K, ita E F ad H K, hoc est B K ad K G. ergo ut B A ad A G, ita B K ad K G. & sunt triangula B A G, B K G similia: & eiusdem rationis A B, B K. linea igitur A B ipsi B K, videlicet semidiametro basis æqualis erit. quod ostendendum proponebatur.

SIMUL verò & illud ostensum est in altera demonstratione triangulum E A F simile esse triangulo H A K.

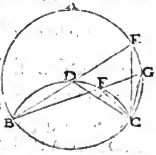
VT enim E F ad H K, ita B A ad A G. triangulum autem E A F ad triangulum H A K duplam habet proportionem eius, quàm triangulum C A D habet ad triangulum H A K. estque C A D triangulum ad triangulum H A K, ut C D, hoc est ut E F ad H K. quare triangulum E A F ad ipsum H A K duplam proportionem habebit laterum eiusdem rationis, videlicet E F, H K: & iccirco triangula E A F, H A K inter se similia erunt. ex cõversa 19. sexti.

EX quibus perspicuum est, si coni scaleni axis æqualis sit basis semidiametro; triangulum æquicrure ad rectos angulos basi, simile esse triangulo per axem æquicruri: & contra, si triangulum æquicrure ad rectos angulos basi simile sit triangulo per axem æquicruri; coni axem semidiametro basis æqualem esse. quod ex iam demonstratis facilè intelligi potest.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XLIII.

SI circulus circulum ſecet per centrum ipſius deſcriptus; & ab altera eorum ſectione ducantur lineæ ſecantes circunferentiam, quæ per centrum tranſit, & ad alterius circuli circunferentiam protrahantur: recta linea, inter convexam alterius circuli circunferentiam & inter concavam alterius interiecta, æqualis eſt lineæ, quæ à communi ſectione lineæ ductæ, & circunferentiæ per centrum, ad alteram communem circulorum ſectionem perducitur.

SIT circulus A B C circa centrum D; & per D alius circulus D B C deſcribatur, ſecans priorem circulum in punctis B, C: ducanturque rectæ lineæ, per D quidem B D
A E, alia verò ut contingit B F G; & D C, F C iungantur. Dico lineam G F ipſi F C æqua-
21. tertii. lem eſſe. Iungantur enim E C, C G. Et quoniam angulus B D C æqualis eſt angulo B F C: erit reliquus E D C reliquo G F C æqualis. ſed & æqualis eſt D E C ipſi F G C; quòd in eadem circunferentia conſiſtat. reliquus igitur eſt æqualis reliquo; & triangula in-
B ter ſe ſimilia ſunt. æquicrure autem eſt triangulum C D E.
C ergo & æquicrure C F G, & linea G F ipſi F C æqualis. ſimiliter & in alijs lineis ductis idem demonſtrabitur. Rurſus in eadem figura ponatur E D ipſi D C æqualis, & G F æqualis F C, circunferentia B D C bifariam in D puncto diviſa. Dico circulum ex centro D, & intervallo D B, vel D C deſcriptum per puncta E, G tranſire. Quoniam enim angulus E D C æqualis eſt angulo G F C; & ſunt triangula E D C, G F C æquicruria: anguli B E C, B G C inter ſe æquales erunt: & propterea in eodem circulo continebuntur. circulus igitur ex centro D, & intervallo D B deſcriptus per puncta E, G tranſibit. quod oportebat demonſtrare.



COMMENTARIVS.

A DICO lineam G F ipſi F C æqualem eſſe.) *In Græco codice ita legitur:* λέγω ὅτι ἴση ἐςὶν ἡ μὲν ΕΔ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΖΗ τῇ ΖΓ, *hoc eſt: Dico lineam E D lineæ D C, & G F ipſi F C æqualem eſſe. Nos primam partem veluti ſupervacaneam ſuſtulimus. tantùm enim abeſt, ut demonſtret lineam E D ipſi D C eſſe æqualem, quod per ſeſe ex circuli diffinitione apparet, ut etiam eo tanquam noto ad propoſitum demonſtrandum utatur.*

B Equicrure autem eſt triangulum C D E.) *Sunt enim D E, D C à centro circuli ad circunferentiam ductæ æquales. illud autem nos addidimus, quod in Græcis codicibus deſiderabatur.*

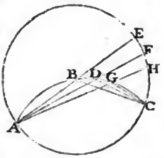
C Et linea G F ipſi F C æqualis.) *Hoc loco etiam nonnulla alia ſuſtulimus, quæ ſupervacanea videbantur.*

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XLIV.

SI in portione circuli inflectantur rectæ lineæ: maxima quidem erit, quæ ad punctum medium inflectitur; aliarum verò ſemper ipſi propinquior remotiore maior erit.

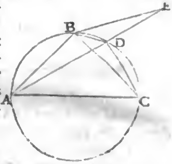
IN

IN portione enim A B C inflectantur rectæ lineæ ; A B C quidem, ita ut circunferentia A B C bifariam in B secetur; A D C verò, & A G C, ut contingit. Dico A B C maximam esse omnium, quæ in portione A B C inflectuntur: & A D C ipsa A G C maiorem esse. Quoniam enim A B circunferentia circunferentiæ B C est æqualis: & recta linea A B æqualis erit B C. itaque centro B & intervallo B A, vel B C circulus A E F H C describatur: & producantur A B E, A D F, A G H. ergo ex antecedenti theoremate E B ipsi B C est æqualis, & F D æqualis D C, & H G ipsi G C. Quoniam igitur A E diameter est circuli A E F: erit A E omnium, quæ in circulo ducuntur, maxima; & A F maior, quàm A H. sed ipsi A E æqualis est A B C, & ipsi A F æqualis A D C, & A H æqualis A G C. ergo A B C omnium maxima est; & A D C maior, quàm A G C: & ita semper ea, quæ propinquior est puncto circunferentiæ medio, remotiore maior erit. quod demonstrandum proponebatur.



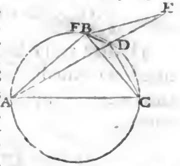
ALITER. Sit circulus A B C, & in portione A B C inflectatur A B C recta linea, ita ut circunferentia A B C bifariam in B dividatur. Dico lineam A B C maximam esse omnium, quæ in eadem portione inflectuntur. Inflectatur enim A D C, & A D E producatur; ita ut D E ipsi D C sit æqualis: iungaturque B D, B E. Quoniam igitur circunferentia A B æqualis est B C circunferentiæ: & in circunferentia quidem A B angulus B D A, in circunferentia verò B C angulus B A C consistit: erit angulus B D A angulo B A C æqualis. communis apponatur B D E. ergo utrique anguli B D E, B D A utrisque B D E, B A C æquales sunt. & sunt B D E, B D A duobus rectis æquales. ergo & B D E, B A C æquales duobus rectis. sunt autem & B D C, B A C æquales duobus rectis. utrique igitur B D E, B A C utrisque B D C, B A C æquales sunt; & communi dempto B A C, reliquus B D E reliquo B D C est æqualis. itaque quoniam C D est æqualis D E, & communis B D; suntque circa æquales angulos: basis C B basi B E æqualis erit. & quoniam A B, B E maiores sunt ipsa A E; utrisque verò A B, B E æqualis est A B C; & A E æqualis est ipsi A D C: erit A B C, quàm A D C maior. similiter & alijs maior ostendetur. ergo A B C maxima est omnium, quæ in portione inflectuntur.

27. tertii. 22. tertii. 4. primi. 20.



SED sit punctum circunferentiæ medium ad F. Dico lineam A B C, quæ puncto F propinquior est, ipsa A D C remotiore maiorem esse. Quoniam enim circunferentia A F B maior est, quàm circunferentia B D C: angulus B D A angulo B A C est maior; & communi apposito B D E, erunt B D E, B D A anguli maiores angulis B D E, B A C. ergo B D E, B A C sunt duobus rectis minores. & sunt B D C, B A C æquales duobus rectis. anguli igitur B D C, B A C angulis B D E, B A C maiores sunt: & communi B A C dempto, reliquus B D C maior est reliquo B D E. & quoniam C D est æqualis D E, & communis B D: erit basis C B basi B E maior. sunt autem A B, B E maiores, quàm A E: & A B C maior, quàm A B, B E. ergo A B C ipsa A E, hoc est A D C maior erit.

24. primi.

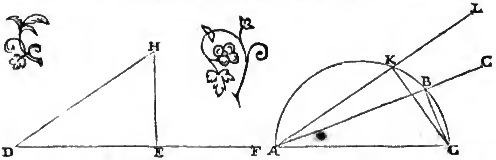


THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XLV.

SI, quatuor rectis lineis inæqualibus existentibus, quadrata ma-

ximæ & minimæ æqualia ſint quadratis reliquarum: recta linea, conſtans ex maxima & minima, minor erit ea, quæ ex reliquis conſtat.

SINT quatuor rectæ lineæ A B, B C, D E, E F: quarum maxima ſit A B, & B C minima; D E verò non ſit minor, quàm E F: & ſint quadrata A B, B C quadratis D E, E F æqualia. Dico lineam A C minorem eſſe, quàm D F. Ducantur enim ad rectos angulos B G, E H: & ponatur B G ipſi B C æqualis, & E H æqualis E F; iunctiſque A G, D H, deſcribatur ſemicirculus circa triangulum A B G orthogonium. & quoniam quadrata A B, B C, hoc eſt A B, B G quadratis D E, E H ſunt æqualia: erit quadratum A G æquale quadrato D H, & linea A G ipſi D H æqualis. eſt autem E H maior, quàm B G. quare aptata in ſemicirculo linea, quæ ſit æqualis E H, angulum B G A ſecabit. itaque aptetur, & ſit G K: & iuncta A K producatur, ut ſit K L æqualis K G. Quoniam igitur quadrata A K, K G quadratis A B, B G æ-



qualia ſunt; quadrata autem A B, B G æqualia quadratis D E, E H: erunt quadrata A K, K G quadratis D E, E H æqualia. quorum quadratum K G eſt æquale quadrato E H. reliquum igitur quadratum A K reliquo D E æquale erit, & linea A K lineæ D E æqualis. ergo triangulum A K G eſt æquale & ſimile triangulo D E H; & linea A L æqualis ipſi D F. itaque quoniam recta linea A K non eſt minor, quàm K G: neque A K circunferentia minor erit, quàm circunferentia K G. quare cùm in circuli portione inflectantur lineæ A K G, A B G; ſitque A K G vel ad punctum circunferentiæ medium, vel ipſi propinquior: erit ex antecedenti theoremate A K G maior, quàm A B G, hoc eſt A L, videlicet D F maior, quàm A C. minor eſt igitur A C, quàm D F. quod demonſtrare oportebat.

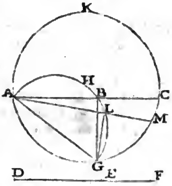
THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XLVI.

SI duæ rectæ lineæ inæquales dividantur: & partium minoris quadrata æqualia ſint quadratis partium maioris: earum omnium maxima quidem erit maior minoris pars, minor verò minima.

SINT rectæ lineæ A B C, D E F in B, E punctis ita diviſæ, ut D E ſit maior, quàm E F; & A B non minor, quàm B C: ſitque A C maior, quàm D F; quadrata verò A B, B C quadratis D E, E F ſint æqualia. Dico harum linearum A B, B C, D E, E F maximam D E, & E F minimam eſſe. Ducatur enim ipſi A C ad rectos angulos B G, quæ ſit æqualis B C; & iungatur A G: circa triangulum verò A B G orthogonium ſemicirculus deſcribatur. Quoniam igitur A B recta linea non eſt minor, quàm B G; neque A B circunferentia circunferentia B G minor erit; & iccirco circun-

cun-

cunferentiæ A B G punctum medium, vel est ad B, vel in circunferentia A B, ut ad H. Itaque ex puncto circunferentiæ A B G medio, tanquam ex centro, & intervallo A H, vel H G circulus descriptus & per punctum C transibit, ut supra demonstratum est. describatur, & sit A K C G. Et quoniam quadratum D F maius est quadratis D E, E F; & quadrata D E, E F quadrato A G sunt æqualia: erit quadratum D F maius quadrato A G; & linea D F, quàm A G maior. minor autem D F, quàm A C. ergo inter lineas A C, A G aptari poterit in circulo A K C G linea ipsi D F æqualis. aptetur; sitque A L M, & iungatur L G. erit ex iam demonstratis L M æqualis L G. sed A L est maior, quàm A B; & A B non minor, quàm B G. ergo A L utraque ipsarum A B, B G maior erit. & L G utraque A B, B G minor. linearum igitur A B, B G, A L, L G maxima est A L, & minima L G. sed B G est æqualis B C, & A L ipsi D E, & L G, hoc est L M ipsi E F, ut ostendimus. ergo linearum A B, B C, D E, E F maxima est D E, & E F minima. quod propositum fuerat demonstrandum. 43. huius. A



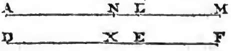
COMMENTARIVS.

ET L G utraque A B, B G minor.] *Si enim L G non est minor utraque A B, B G: quoniam A L est utraque ipsarum maior; erunt utræque A L, L G maiores utrisque A B, B G, quod est absurdum. demostratum etenim est supra minores esse.* A 44. huius.

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XLVII.

SI duæ rectæ lineæ æquales ita dividantur, ut rectangulum contentum partibus unius æquale sit ei, quod alterius partibus continetur: erunt unius partes partibus alterius æquales.

SINT rectæ lineæ inter se æquales A L M, D E F in punctis L, E ita divisæ, ut rectangulum A L M rectangulo D E F sit æquale. Dico lineam A L ipsi D E æqualem esse. Quoniam enim A M est æqualis D F: & earum dimidiæ æquales erunt. ergo & quadratum dimidiæ A M est æquale quadrato dimidiæ D F. itaque si A M bifariam divisa fuerit in L: rectangulum A L M est dimidiæ quadratum. ergo & D F bifariam dividitur in E; quoniam rectangulum D E F æquale est quadrato dimidiæ A M, videlicet dimidiæ D F: sin minùs, dividantur bifariam in punctis N, X. æqualis igitur est N M ipsi X F: & propterea quadratum N M quadrato X F æquale, hoc est rectangulum A L M unà cum quadrato N L æquale rectangulo D E F unà cum X E quadrato. quorum rectangulum A L M æquale est rectangulo D E F. ergo reliquum N L quadratum æquale quadrato X E, & linea N L lineæ X E æqualis. est autem & N M æqualis X F. reliqua igitur L M ipsi E F, & A L ipsi D E æqualis erit. quod oportebat demonstrare.

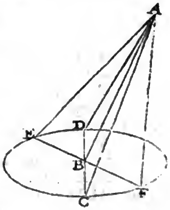


THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XLVIII.

SI conus scalenus per axem secetur; eorum, quæ fiunt, triangulorum

lorum quod maius est, maiorem perimetrum habet; & cuius trianguli maior perimeter, illud maius est.

SECETVR conus scalenus per axem A B; & ex sectione fiant A C D, A E F triangula, quorum maius A C D; ita ut E A quidem sit maior, quam A D. Dico A C D perimetrum perimetro A E F maiorem esse. Quoniam enim æquales sunt C D, E F bases; communis autem ducta est B A à vertice ad punctum, quod ipsas bifariam secat; & triangulum A E F minus est triangulo A C D: habebit E A ad A F maiorem proportionem, quàm C A ad A D, ut in vigesimo theoremate est
A demonstratum. ergo E A maxima est quatuor linearum, & A F minima: quod etiã demonstratum est. & quoniam quadrata à maxima & minima, hoc est quadrata E A, A F
B quadratis C A, A D sunt æqualia: erunt utræque lineæ E A, A F minores utrisque C A, A D, ex antecedenti theoremate. apponatur E F, C D. tota igitur A E F perimeter tota perimetro A C D est minor. ergo maioris trianguli perimeter maior erit.



EX quibus perspicuum est in conis scalenis, maximi quidem triangulorum, quæ fiunt per axem, hoc est æquicruris perimetrum esse maximam; minimi verò, hoc est eius, quod est ad rectos angulos basi coni, perimetrum minimam esse: & aliorum semper quod maius maiorem perimetrum habere, quàm quod minus.

RVRSVS ponatur trianguli C A D perimeter maior perimetro E A F. Dico triangulum A C D triangulo E A F maius esse. Quoniam enim A C D perimeter maior est perimetro E A F; æqualis autem C D ipsi E F: erunt reliquæ C A, A D reliquis E A, A F maiores. sed quadrata C A, A D æqualia sunt quadratis E A, A F. ergo quatuor linearum C A, A D, E A, A F maxima quidem est E A, minima verò
C A F; quæ omnia ante demonstrata sunt. quare E A ad A F maiorem habet proportionem, quàm D A ad A C. itaque quoniam duo triangula C A D, E A F bases æquales habent; & lineam, quæ à vertice ad punctum basim bifariam secans ducitur, habent eandem; alterius autem maius latus ad minus maiorem proportionem habet,
D quam alterius maius latus ad minus, vel æquale ad æquale: triangulum E A F minus erit. triangulũ igitur C A D maius est triangulo E A F. quod demonstrare oportebat.

COMMENTARIVS.

A ERGO E A maxima est quatuor linearum, & A F minima.) *Quoniam enim E A*
17. huius. *ad A F maiorem habet proportionem, quàm C A ad A D: habebit & E A quadratum ad quadratum A F maiorem proportionem, quàm quadratum C A ad quadratum A D. sed quadrata E A, A F æqualia sunt quadratis C A, A D; quod ex sexta decima huius apparet: utraque enim sunt æqualia duobus quadratis semidiametrorum & duplo quadrati A B. ergo ex decima octava huius quatuor quadratorum E A, A F, C A, A D maximum est E A, & minimum A F: & iccirco linearum E A, A F, C A, A D maxima est E A, & A F minima.*

ERVNT

Erunt utræque lineæ E A, A F minores utrisque C A, A D ex antecedenti theoremate.] *Ex quadragesima quinta huius.* B

Quæ omnia ante demonstrata sunt.] *In quadragesima sexta huius.* C

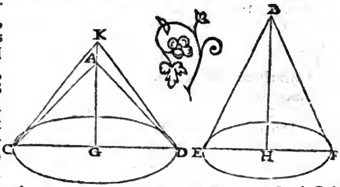
Triangulum E A F minus erit.) *Ex decima nona huius.* D

THEOREMA XL. PROPOSITIO XLIX.

RECTORUM conorum æqualium, & dissimilium triangula per axem ex contraria parte respondent suis basibus.

SINT recti coni æquales & dissimiles, quorũ vertices A, B puncta; axes AG, BH: & triangula per axẽ ACD, BEF; bases autẽ circuli circa diametros CD, EF. Dico ut triangulum ACD ad triangulum BEF, ita esse E F basim ad basim C D. Quoniam enim coni sunt æquales: erit ut circulus circa centrũ G ad circulum circa H, ita axis BH ad AG axem: circulus autẽ circa G ad circulum circa H duplã proportionem habet eius, quam CD habet ad EF. sit inter B H & A G media proportionalis K G; & iungantur K C, K D. erit ut C D ad E F, ita BH ad K G & KG ad G A. Quoniam igitur ut C D ad E F, ita BH ad K G: erit triangulum B E F triangulo K C D æquale. & quoniam ut C D ad E F, ita K G ad G A ut autem K G ad G A, ita K C D triangulum ad triangulum A C D: erit ut C D ad E F, ita triangulum K C D, hoc est B E F ad triangulum A C D. ergo ut A C D triangulum ad triangulum B E F, ita basis E F ad C D basim. triangula igitur exposita ex contraria parte suis basibus respondent.

15. duodecimi. A B C D



COMMENTARIVS.

CIRCVLVS autem circa G ad circulum circa H duplam proportionem habet eius, quam C D habet ad E F.] *Circulus enim circa G ad circulum circa H est ut quadratum C D ad quadratum E F. quadratum verò C D ad E F quadratum duplam habet proportionem eius, quam C D habet ad E F. ergo circulus circa G ad circulum circa H duplam proportionem habebit eius, quam C D ad E F.* A 2. duodecimi. cor. 20. sexti.

Erit ut C D ad E F, ita B H ad K G, & K G ad G A.) *Sequitur ex iam dictis axem B H ad axem A G duplam habere proportionem eius, quam habet C D ad E F. sed B H ad A G duplam proportionem habet eius, quam B H ad K G, & K G ad G A. ergo ut C D ad E F, ita erit B H ad K G, & K G ad G A.* B

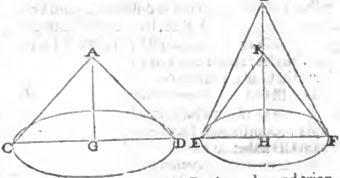
Quoniam igitur ut C D ad E F, ita B H ad K G: erit triangulum B E F triangulo K C D æquale.) *Erit enim ex quarta decima sexti rectangulum ex E F & B H æquale ei, quod fit ex C D & K G. sed rectanguli ex E F & B H triangulum B E F est dimidium: & rectanguli ex C D & K G dimidium est triangulum K C D. triangulum igitur B E F triangulo K C D æquale erit.* C

Vt autem K G ad G A, ita K C D triangulum, ad triangulum A C D.] *Nam ut K G ad G A, ita rectangulum ex C D & K G ad rectangulum ex C D & G A; & ita horum dimidia, hoc est triangulum K C D ad triangulum A C D.* D

THEOREMA XLI. PROPOSITIO L.

QUORUM conorum rectorum triangula per axem ex contraria parte respondent suis basibus, ij inter se sunt æquales.

SINT conorum vertices quidem A,B; axes A G, B H rectæ lineæ; triangula verò per axem A C D, B E F: & sit ut C D ad E F, ita triangulum B E F ad triangulum A C D. Dico conos inter se æquales esse. Fiat enim ut B E F triangulum ad triangulum A C D, ita A C D ad triangulum K E F. ergo triangulum B E F ad triangulum K E F duplam habet proportionem eius, quam triangulum A C D ad ipsum K E F. Quoniam igitur ut C D ad E F, ita B E F triangulum ad triangulum A C D; ut autem triangulum B E F ad ipsum A C D, ita A C D ad triangulũ K E F: erit ut C D ad E F, ita A C D triangulum ad triangulum K E F. quare cùm triangula A C D, K E F inter se sint sicuti bases, (ex conversa primæ sexti.) sub eadem erunt altitudine. ergo AG ipsi KH est æqualis. habet autem circulus G ad circulum H duplam proportionem eius, quam C D diameter ad diametrum E F: & ut C D ad E F, ita triangulum AC D ad triangulum K E F. ergò circulus G ad circulũ H duplam proportionem habet eius, quam C A D triangulum ad triangulum EK F. habebat autem & triangulum

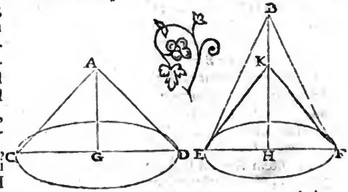


EBF ad triangulum EKF duplam proportionẽ eius, quam C A D triangulum ad triangulum E K F. ergo ut circulus G ad circulum H, ita E B F triangulum ad triangulum E K F, hoc est recta linea B H ad rectam H K. est autem H K ipsi A G æqualis. ut igitur (15. duodecimi.) circulus G ad circulũ H, ita recta linea BH ad AG. & sunt BH, AG axes conorũ, qui ex cõtraria parte respondẽt basibus, videlicet circulis G, H. ergo coni AGCD, BHEF inter se æquales sunt.

THEOREMA XLII. PROPOSITIO LI.

SI conorũ rectorũ basis ad basim duplam proportionem habeat eius, quã conus ad conũ, triangula per axem inter se æqualia erunt.

SINT coni recti; quorum vertices A,B puncta; bases circuli circa centra G, H; & triangula per axes ACD, BEF: habeat autem circulus G ad circulum H duplam proportionem eius, quam A G C D conus ad conum B H E F. Dico triangula ACD, BEF inter se æqualia esse. Sit enim ut AGCD conus ad conum B H E F, ita B H E F ad conum K H E F: Et quoniam circulus G ad circulum H duplam proportionem habet, quam A G C D conus ad conum B H E F; conus autem A G C D ad conum KHEF proportionẽ duplam habet, quam A G C D conus ad conum BHEF: erit ut circulus G ad circulum H, ita conus AGCD ad conũ KHEF. quare cùm AGCD, KHEF coni inter se sint sicuti bases; æqualem habebunt altitudinẽ, ex cõversa undecimæ duodecimi Elementorum. ergo A G ipsi K H (14. duodecimi.) est æqualis. quoniam igitur circulus G ad circulum H duplam proportionem habet, quam A G C D conus ad conum B H E F, hoc est quam conus B H E F ad conum K H E F, hoc est quam B H ad H K; habet autem circulus G ad circulum H duplã proportionem, quam C D ad E F: erit ut C D ad E F, ita B H ad H K; hoc est ad A G. triangula igitur A C D, B E F inter se æqualia erunt. quod oportebat demonstrare.

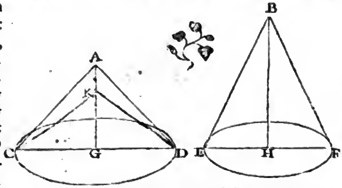


THEO-

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO LII.

SI triangula per axem inter se æqualia sint: & basis ad basim duplam proportionem habebit eius, quam conus habet ad conum.

DESCRIBANTVR rursus prædicti coni: & ponantur triangula ACD,BEF inter se æqualia. Demonstrandum est circulum G ad circulum H duplam proportionem habere eius, quam A G C D conus habet ad conum B H E F. Sit enim ut recta linea B H ad rectam A G,ita A G ad G K. Quoniam igitur triangula A C D, B E F sunt æqualia: erit ut C D ad E F, ita B H ad A G, hoc est A G ad G K. & quoniam circulus G ad circulum H duplam habet proportionem, quam C D ad E F, hoc est quam B H ad A G;habetque BH ad GK duplam proportionem, quam B H ad A G: erit ut circulus G ad circulum H, ita B H ad K G. conus igitur K G C D cono B H E F est æqualis. ut autem C D ad E F, ita est A G ad G K: & ut A G ad G K, ita A G C D conus ad conum KGCD, hoc est ad conum BHEF. ergo ut C D ad E F, ita A G C D conus ad conum B H E F. sed circulus G ad circulum H duplam habet proportionem,quam C D ad E F.circulus igitur G ad circulum H, hoc est basis A G C D coni ad basim coni B H E F duplam proportionem habet, quam A G C D conus ad conum B H E F. quod demonstrare oportebat.



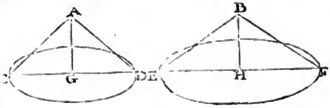
15. duodecimi.

14. duodecimi.

THEOREMA XLIV. PROPOSITIO LIII.

RECTI coni æquealti duplã inter se proportionem habent eius, quam triangula per axem.

DESCRIBANTVR ijdẽ coni:& sit axis AG æqualis BH.Dico AGCD conum ad conum BHEF duplam proportionem habere eius, quam triãgulum ACD habet ad triangulum BEF. Quoniam enim circulus G ad circulum H duplam proportionem habet, quam CD ad EF: & ut circulus G ad circulum H,ita AGCD conus ad conũ BHEF;sunt enim æquealti:habebit conus AGCD ad conum BH EF duplam proportionem,quam CD ad EF,hoc est quam ACD triãgulum ad triangulum BEF. quod demonstrare oportebat.

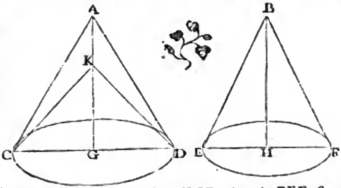


THEOREMA XLV. PROPOSITIO LIV.

SI recti coni inter sese duplam proportionem habeant eius, quam triangula per axem; ipsi æquealti erunt.

DESCRIBANTVR coni:& ponatur AGCD conus ad conũ B HEF duplam habere proportionem eius, quam triangulum A C D ad triangulum B E F. Dico A G ipsi B H æqualem esse.Ponatur enim triangulo BEF æquale triangulum KCD.Et quoniam AG CD conus ad conum B H E F duplam proportionem habet, quam A C D triangulum ad triangulum BEF;est autẽ triangulum BEF æquale triangulo KCD:habebit AGCD conus ad conum BHEF duplam proportionem, quam tria gulum ACD ad triangulum KCD,hoc est quam AG ad GK,hoc est quam AGCD conus ad conum KGCD. ergo ut

AGCD ad KGCD conum,ita KGCD conus ad conum BHEF. quoniam igitur conorũ KGCD,BHEF triangula per axem KCD,BEF æqualia sunt: basis coni G ad basim H duplam proportionem habebit, quam KGCD conus ad conum BHEF, ut in quinquagesima secũda huius demõstratũ est. sed ut KGCD conus ad conum BHEF,ita conus AGCD ad conum KGCD, & recta linea AG ad GK. circulus igitur G ad circulũ H duplam proportionem habet,quã AG ad GK. sed & duplam habet proportionẽ, quam diameter CD ad EF diametrum.

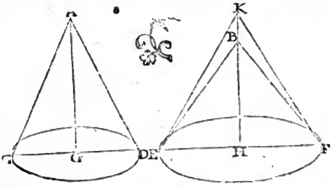


ergo ut CD ad EF,ita AG ad GK.itaque quoniam triangulum KCD triãgulo BEF est æquale:ut CD ad EF,ita erit BH ad KG.ostẽsũ est autẽ ut CD ad EF,ita AG ad GK.quare
9.quinti. ut BH ad KG,ita AG ad GK. æqualis igitur est AG ipsi BH. quod oportebat demõstrare.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO LV.

SI recti coni ex contraria parte respondeant suis axibus;triangula per axem inter se æqualia erunt.

DESCRIBANTVR coni;& sit ut AGCD conus ad conũ BHEF,ita axis BH ad AG axem. Dico triangula ACD,BEF inter se æqualia esse.Sit enim AGCD cono conus æquealtus KHEF.Et quoniam ut AGCD conus ad conum BHEF,ita est recta linea BH ad AG; æqualis autem KH ipsi AG: erit ut AGCD conus ad conum BHEF, ita BH ad HK;hoc est BHEF conus ad conum KHEF.conus igitur AGCD ad conum KHEF duplam proportionem habet, quam BHEF conus ad conum KHEF. sed ut BHEF conus ad conum KHEF, ita BEF triangulum ad triangulum KEF. ergo conus AGCD ad conum KHEF duplam proportionem habet, quã BEF triangulum ad triangulum KEF. habet autem conus AGCD ad conum æquealtum KHEF duplam proportionem,quam



ACD triangulum ad triangulum KEF, ut demonstratum est in quinquagesima tertia huius.quare ut BEF triangulũ ad triangulum KEF, ita triangulũ ACD ad triãgulum KEF. triangulum igitur ACD triangulo BEF est æquale. quod demonstrandũ proponebatur.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO LVI.

SI triangula per axem inter se æqualia sint; & coni ex contraria parte suis axibus respondebunt.

PONATVR ACD triangulũ triangulo BEF æquale. Dico ut AGCD conus ad conum BHEF, ita esse axem BH ad AG axem.In eadem enim figura & constructione, quoniam triangulum ACD æquale est triangulo BEF: erit ut ACD triangulum ad triangulum KEF, ita triangulum BEF ad KEF triangulum. sed conus AGCD ad conum æquealtum KHEF duplam proportionem habet, quam ACD triangulum ad triangulum KEF: & ut triangulum ACD ad triangulum KEF, ita triangulum BEF

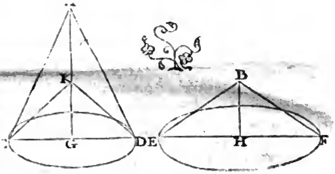
ad

ad triangulum K E F. conus igitur A G C D ad conum K H E F duplam proportionē habebit, quam triangulum B E F ad ipsum K E F, hoc est quam conus B H E F ad conum K H E F. ergo ut A G C D conus ad conum B H E F, ita conus B H E F ad K H E F, hoc est ita B H ad H K. est autem K H ipsi A G æqualis. ut igitur A G C D conus ad conum B H E F, ita B H axis ad axem A G. quod demonstrare oportebat.

TEOREMA XLVIII. PROPOSITIO LVII.

SI coni recti ex contraria parte suis basibus respondeant; triangula per axem inter se triplam proportionem habebunt eius, quam basis habet ad basim ex contraria parte.

DESCRIBANTVR coni; & sit ut AGCD conus ad conum BHEF, ita H basis ad basim G. Dico ACD triangulum ad triangulū BEF triplā proportionē habere eius, quā EF habet ad CD. Ponatur enim ipsi BH æqualis KG. erunt coni æquealti KGCD, BHEF inter sese, ut eorum bases. Quoniam igitur ut AGCD conus ad conum BHEF, ita H basis ad basim G; & ut basis H ad basim G, ita conus B H E F ad conum K G C D: erit ut A G C D conus ad conum B H E F, ita B H E F ad ipsum K G C D conum. quare conus A G C D ad conum K G C D duplam proportionem habet eius, quam conus B H E F ad conum K G C D. sed ut conus A G C D ad K G C D, ita A C D triangulum ad triangulum K C D. triāgulum igitur ACD ad ipsū KCD duplam proportionē habet, quam B H E F conus ad conum æquealtum KGCD. conus autem BHEF ad ipsum KGCD duplam proportionem habet, quam triangulum BEF ad triangulum KCD. ergo triangulum A C D ad triangulum KCD quadruplā proportionem habet eius, quam B E F triangulum ad triangulum K C D: & propterea triangulum A C D ad ipsum BEF triplam proportionem habebit, quam triangulum BEF ad triangulum KCD. sed ut triangulum B E F ad KCD, ita EF ad CD. triangulum igitur A C D ad triangulum B E F triplam proportionem habebit, quam E F ad C D. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XLIX. PROPOSITIO LVIII.

QUORUM conorum rectorum triangula per axem inter se triplam proportionem habent eius, quam basis ad basim ex contraria parte: hi coni suis basibus ex contraria parte respondebunt.

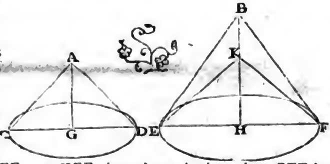
IN eadem figura & constructione habeat A C D triangulum ad triangulum BEF triplam proportionem eius, quam E F basis trianguli ad C D basim. Dico ut AGCD conus ad conum BHEF, ita esse H basim coni ad basim G. Quoniam enim ACD triangulum ad triangulum B E F triplam proportionem habet eius, quam E F ad C D; ut autē E F ad CD, ita BEF triangulum ad triangulum KCD æquealtum: habebit triangulum ACD ad triangulum BEF triplam proportionem, quam BEF triangulum ad ipsum KCD. ergo triangulum ACD ad triangulum KCD quadruplam proportionem habebit, quam BEF triangulum ad triangulum KCD. ut autem triangulum ACD ad ipsum KCD, ita AGCD conus ad conum KGCD. conus igitur AGCD ad conum KGCD quadruplam proportionem habet eius, quam triangulum BEF ad triangulum KCD. sed conus BHEF ad conum KGCD æquealtum duplam proportionem habet, quam triangulum

gulum BEF ad triangulũ KCD. ergo conus AGCD ad conũ KGCD duplã habebit proportione eius, quam BHEF conus ad conum KGCD. quare ut conus AGCD ad conum BHEF, ita BHEF conus ad conu KGCD. ſed ut BHEF conus ad conu KGCD, ita H baſis ad baſim G. ut igitur AGCD conus ad conũ BHEF, ita H baſis ad G baſim. quod demoſtrare oportebat.

THEOREMA L. PROPOSITIO LIX.

Si rectus conus ad rectum conum duplam proportionem habeat eius, quam baſis ad baſim; triangulum per axem ad triangulũ per axem triplam proportionem habebit, quam triãguli baſis ad baſim.

DESCRIBANTVR coni: & ponatur AGCD conus ad conũ BHEF duplã proportionẽ habere eius, quã G baſis coni habet ad H baſim. Dico triangulum ACD ad triangulum BEF triplam habere proportionem, quam CD baſis trianguli ad baſim EF. Sit ipſi AG æqualis KH. erunt coni æquealti AGCD, KHEF inter ſeſe, ſicuti baſes. Quoniam igitur AGCD conus ad conum BHEF duplam proportionem habet, quam G baſis ad baſim H; ut autem baſis G ad H, ita AGCD conus ad conum KHEF: habebit AGCD conus ad conum BHEF duplam proportionem, quam AGCD conus ad conum KHEF. ergo ut AGCD conus ad conum KHEF, ita KHEF ad BHEF conũ. & quoniã coni AGCD, KHEF æquealti ſunt: habebit AGCD conus ad conu KHEF duplã proportionem, quam triangulum ACD ad triangulum KEF, quod demonſtratum iam eſt. ut autem AGCD conus ad conum KHEF, ita & conus KHEF ad BHEF conum: &



KEF triangulum ad triangulum BEF. ergo KEF triangulum ad triangulum BEF duplam proportionem habet, quam triangulum ACD ad triangulum KEF: ac propterea triangulum ACD ad triangulum BEF triplam habebit proportionem, quam ACD triangulum ad triangulum KEF. ſed ut triangulum ACD ad triangulum KEF, ita baſis CD ad EF baſim: ſunt enim triangula æquealta. triangulum igitur ACD ad triangulũ BEF triplã proportionem habet, quam CD baſis ad baſim EF. quod demõſtraſſe oportuit.

THEOREMA LI. PROPOSITIO LX.

SI triangulum per axem ad triangulum per axem triplam proportionem habeat eius, quam trianguli baſis ad baſim; conus ad conum duplam proportionem habebit, quam coni baſis ad baſim.

IN eadem enim figura triangulum ACD ad triangulum BEF triplam proportionem habeat, quam baſis CD ad EF baſim: & rurſus ponatur ipſi AG æqualis KH. Quoniam igitur triangulum ACD ad triangulum BEF triplã proportionem habet, quam CD ad EF; ut autem CD ad EF, ita ACD triangulum ad triangulum KEF: habebit ACD triangulum ad triangulum BEF triplam proportionem, quam triangulum ACD ad ipſum KEF. ergo KEF triangulum ad triangulum BEF duplam proportionem habet, quam ACD triangulum ad triangulum KEF. ſed ut triangulum KEF ad triangulum BEF, ita KHEF conus ad conum BHEF. conus igitur KHEF ad conum BHEF duplam proportionem habebit, quam ACD triangulum ad triangulum KEF. habet autem & AGCD conus ad conum æquealtum KHEF duplam proportionem, quam ACD triangulũ ad triangulum KEF. ergo ut conus AGCD ad conum KHEF, ita KHEF ad BHEF conum: & iccirco AGCD conus ad conum BHEF duplam proportionem habet, quam AGCD conus ad conũ KHEF, hoc eſt quam baſis G ad H baſim. quod demonſtrare op[ortebat].

LIBRORUM SERENI FINIS.